

# Table des matières

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Les auteurs</b>  | <b>1</b>  |
| <b>Avant-propos</b>   | <b>3</b>  |
| <b>Remerciements</b>  | <b>7</b>  |
| <b>1 Introduction à l'écriture mathématique</b>                       | <b>9</b>  |
| I La langue symbolique . . . . .                                      | 9         |
| II Démonstrations . . . . .   | 25        |
| III Conseils de rédaction . . . . .                                   | 36        |
| <b>Partie I Structures fondamentales</b>                              | <b>43</b> |
| <b>2 Ensembles, applications et structures algébriques</b>            | <b>49</b> |
| I La notion d'ensemble . . . . .                                      | 49        |
| II Applications et fonctions . . . . .                                | 57        |
| III Lois de composition sur un ensemble . . . . .                     | 67        |
| IV Relations binaires sur un ensemble . . . . .                       | 71        |
| V Les ensembles $\mathbb{N}$ , $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ . . . . . | 76        |
| VI Exercices . . . . .  | 81        |
| VII Fiche-résumé . . . . .  | 82        |
| Complément      En traversant une rivière . . . . .                   | 83        |
| <b>3 Dénombrément</b>   | <b>91</b> |
| I Ensembles de même cardinal . . . . .                                | 91        |
| II Ensembles finis . . . . .  | 91        |
| III Opérations sur les cardinaux finis . . . . .                      | 95        |
| IV Arrangements et combinaisons . . . . .                             | 101       |
| V Quelques dénombrements classiques . . . . .                         | 105       |
| VI Ensembles infinis . . . . .  | 108       |
| VII Exercices . . . . .   | 112       |
| VIII Fiche-résumé . . . . .   | 113       |

|            |  |            |
|------------|--|------------|
| <b>4</b>   | <b>La structure de groupe</b>                                  | <b>115</b> |
| I          | Définition des groupes . . . . .                               | 115        |
| II         | Sous-groupes . . . . .   | 119        |
| III        | Morphismes de groupes . . . . .                                | 124        |
| IV         | Ordre d'un élément . . . . .                                   | 129        |
| V          | Exercices . . . . .  | 131        |
| VI         | Fiche-résumé . . . . .   | 132        |
| Complément | Les groupes quotient . . . . .                                 | 133        |
| <b>5</b>   | <b>Le groupe symétrique <math>\mathfrak{S}</math></b>          | <b>137</b> |
| I          | Permutations d'un ensemble à $n$ éléments . . . . .            | 138        |
| II         | Décompositions d'une permutation . . . . .                     | 143        |
| III        | La signature d'une permutation . . . . .                       | 146        |
| IV         | Exercices . . . . .  | 150        |
| V          | Fiche-résumé . . . . .   | 151        |
| Complément | Groupes et symétrie . . . . .                                  | 152        |
| <b>6</b>   | <b>Anneaux et corps</b>  | <b>173</b> |
| I          | La structure d'anneau . . . . .                                | 173        |
| II         | Sous-ensembles remarquables d'un anneau . . . . .              | 176        |
| III        | Morphismes d'anneaux . . . . .                                 | 178        |
| IV         | Arithmétique dans un anneau intègre . . . . .                  | 179        |
| V          | La structure de corps . . . . .                                | 181        |
| VI         | Exercices . . . . .  | 182        |
| VII        | Fiche-résumé . . . . .   | 183        |
| Complément | Un autre corps . . . . .                                       | 184        |
| <b>7</b>   | <b>Arithmétique dans <math>\mathbb{Z}</math></b>               | <b>197</b> |
| I          | Divisibilité dans l'anneau $(\mathbb{Z}, +, \times)$ . . . . . | 197        |
| II         | La relation de congruence sur $\mathbb{Z}$ . . . . .           | 200        |
| III        | Les notions de PGCD et de PPCM . . . . .                       | 203        |
| IV         | Nombres premiers . . . . .                                     | 209        |
| V          | L'équation diophantienne du premier degré . . . . .            | 212        |
| VI         | Les anneaux $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ . . . . .    | 213        |
| VII        | Exercices . . . . .  | 215        |
| VIII       | Fiche-résumé . . . . .   | 216        |
| Complément | Quelques jeux . . . . .  | 217        |

|  |            |
|--|------------|
| <b>8 Polynômes à une indéterminée sur le corps <math>\mathbb{K} = \mathbb{R}</math> ou <math>\mathbb{C}</math></b> | <b>221</b> |
| I L'algèbre $\mathbb{K}[X]$ . . . . .  | 221        |
| II Opérations usuelles sur les polynômes . . . . .   | 228        |
| III Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$ , acte I . . . . .   | 234        |
| IV Racines d'un polynôme . . . . .   | 246        |
| V Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$ , acte II . . . . .  | 253        |
| VI Exercices . . . . .   | 259        |
| VII Fiche-résumé . . . . .   | 261        |
| Complément Des racines . . . . .   | 263        |
| <b>9 Fractions rationnelles</b>  | <b>275</b> |
| I Quand les polynômes deviennent inversibles . . . . .   | 275        |
| II Décomposition en partie entière et partie polaire . . . . .   | 278        |
| III Décomposition en éléments simples . . . . .  | 281        |
| IV Exercices . . . . .   | 293        |
| V Fiche-résumé . . . . .   | 294        |
| Complément L'idée de fraction . . . . .  | 295        |
| <br>   |            |
| <b>Partie II Algèbre linéaire</b>  | <b>303</b> |
| <br>   |            |
| <b>10 Calcul vectoriel dans <math>\mathbb{K}^n</math></b>  | <b>311</b> |
| I L'espace vectoriel canonique $\mathbb{K}^n$ . . . . .  | 311        |
| II Familles libres, familles liées . . . . .   | 318        |
| III Exemple : l'espace des carrés magiques . . . . .   | 327        |
| IV Exercices . . . . .   | 329        |
| V Fiche-résumé . . . . .   | 330        |
| <br>   |            |
| <b>11 Calcul matriciel</b>   | <b>331</b> |
| I Matrices . . . . .   | 331        |
| II Rang d'une matrice . . . . .  | 338        |
| III La méthode du pivot de Gauss . . . . .   | 345        |
| IV Résolution des systèmes linéaires . . . . .   | 349        |
| V Matrices particulières . . . . .   | 354        |
| VI Exercices . . . . .   | 365        |
| VII Fiche-résumé . . . . .   | 367        |

|  |            |
|--|------------|
| <b>12 Applications linéaires de <math>\mathbb{K}^n</math> dans <math>\mathbb{K}^m</math></b> | <b>369</b> |
| I Application linéaire définie par une matrice . . . . .                                     | 369        |
| II Noyau, image et rang . . . . .  | 372        |
| III Théorème du rang . . . . .   | 375        |
| IV Exercices . . . . .   | 381        |
| V Fiche-résumé . . . . .   | 382        |
| <b>13 Espaces vectoriels et applications linéaires</b>                                       | <b>383</b> |
| I $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $\mathbb{K}$ -algèbres . . . . .                       | 383        |
| II Applications linéaires . . . . .  | 392        |
| III Bases. Dimension . . . . .   | 402        |
| IV Exercices . . . . .   | 417        |
| V Fiche-résumé . . . . .   | 420        |
| <b>14 Représentation matricielle d'une application linéaire</b>                              | <b>421</b> |
| I Système de coordonnées associé à une base . . . . .  | 421        |
| II Représentation d'une application linéaire par une matrice . . . . .                       | 428        |
| III Somme directe de sous-espaces vectoriels . . . . .                                       | 436        |
| IV Sommes directes et applications linéaires . . . . .                                       | 446        |
| V Exercices . . . . .  | 456        |
| VI Fiche-résumé . . . . .  | 458        |
| Complément Le lemme des noyaux . . . . .   | 460        |
| <b>15 Déterminants</b>   | <b>463</b> |
| I Volume orienté en dimension un, deux ou trois . . . . .                                    | 463        |
| II Déterminant d'une matrice . . . . .   | 468        |
| III Calculs de déterminants et conséquences . . . . .  | 473        |
| IV Exercices . . . . .   | 482        |
| V Fiche-résumé . . . . .   | 484        |
| Complément Questions d'orientation . . . . .   | 485        |
| <b>Partie III Analyse</b>  | <b>489</b> |
| <b>16 La droite réelle</b>   | <b>499</b> |
| I La nécessité d'enrichir le corps des rationnels . . . . .                                  | 500        |
| II La droite réelle . . . . .  | 505        |
| III Exercices . . . . .  | 519        |
| IV Fiche-résumé . . . . .  | 520        |

|  |            |
|--|------------|
| <b>17 Les suites réelles ou complexes</b>  | <b>521</b> |
| I Suites bornées, suites majorées, suites minorées . . . . .                     | 523        |
| II Suites convergentes . . . . .   | 524        |
| III Opérations élémentaires sur les limites . . . . .                            | 526        |
| IV Ordre total et suites réelles convergentes . . . . .                          | 530        |
| V Critère de Cauchy . . . . .  | 536        |
| VI Extension de la notion de limite . . . . .                                    | 538        |
| VII Limite sup et limite inf . . . . .   | 542        |
| VIII Les valeurs d'adhérence d'une suite . . . . .                               | 544        |
| IX Exercices . . . . .   | 548        |
| X Fiche-résumé . . . . .   | 550        |
| Complément 1 Jeux et intérêts . . . . .  | 551        |
| Complément 2 Les suites homographiques . . . . .                                 | 556        |
| Complément 3 Construction de $\mathbb{R}$ . . . . .                              | 562        |
| <b>18 Représentation et approximation des réels</b>                              | <b>565</b> |
| I Développement d'un réel dans une base donnée . . . . .                         | 566        |
| II Exercices . . . . .   | 573        |
| III Fiche-résumé . . . . .   | 574        |
| Complément 1 Fractions continuées . . . . .                                      | 575        |
| Complément 2 Les gammes . . . . .  | 586        |
| <b>19 La notion générale de fonction en analyse</b>                              | <b>597</b> |
| I La notion moderne de fonction . . . . .  | 597        |
| II Quelques propriétés des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ . . . . . | 602        |
| III Fiche-résumé . . . . .   | 607        |
| Complément 1 Historique . . . . .  | 608        |
| Complément 2 Des constructions . . . . .   | 612        |
| <b>20 Les fonctions continues</b>  | <b>619</b> |
| I Limite d'une fonction en un point . . . . .                                    | 621        |
| II Continuité d'une fonction . . . . .   | 635        |
| III Propriétés globales des fonctions continues . . . . .                        | 639        |
| IV Comparaison des fonctions . . . . .   | 649        |
| V Exercices . . . . .  | 658        |
| VI Fiche-résumé . . . . .  | 659        |
| <b>21 Les fonctions dérivables</b>   | <b>661</b> |
| I Définitions générales et premières propriétés . . . . .                        | 663        |
| II Le théorème des accroissements finis . . . . .                                | 672        |
| III Cas des fonctions à valeurs complexes . . . . .                              | 679        |
| IV Application : retour sur les suites $u_{n+1} = f(u_n)$ . . . . .              | 681        |
| V Exercices . . . . .  | 694        |
| VI Fiche-résumé . . . . .  | 697        |

|   |            |
|---|------------|
| <b>22 Les fonctions intégrables</b>                           | <b>699</b> |
| I Intégrale d'une fonction en escalier . . . . .              | 701        |
| II Fonctions Riemann-intégrables . . . . .                    | 705        |
| III Primitives et intégrales . . . . .                        | 716        |
| IV Deux méthodes de transformation des intégrales . . . . .   | 721        |
| V Sommes de Riemann et de Darboux . . . . .                   | 723        |
| VI Méthodes usuelles d'intégration . . . . .                  | 729        |
| VII Le calcul des longueurs des courbes planes . . . . .      | 733        |
| VIII Exercices . . . . .                                      | 737        |
| IX Fiche-résumé . . . . .                                     | 739        |
| <b>23 Retour sur les fonctions élémentaires</b>               | <b>741</b> |
| I Logarithmes et exponentielles . . . . .                     | 742        |
| II Fonctions hyperboliques et leurs inverses . . . . .        | 752        |
| III Fonctions trigonométriques et inverses . . . . .          | 757        |
| IV Les fonctions comme solutions d'équations . . . . .        | 775        |
| V Exercices . . . . .   | 784        |
| VI Fiche-résumé . . . . .                                     | 785        |
| <b>24 Dérivées d'ordre supérieur et applications</b>          | <b>787</b> |
| I Dérivées successives . . . . .                              | 788        |
| II Fonctions convexes et dérivation . . . . .                 | 793        |
| III Les formules de Taylor . . . . .                          | 799        |
| IV Les développements limités et leurs applications . . . . . | 808        |
| V Exercices . . . . .   | 821        |
| VI Fiche-résumé . . . . .                                     | 824        |
| Complément 1 Fonction étranges . . . . .                      | 825        |
| Complément 2 Convexité . . . . .                              | 827        |
| <b>Partie IV Calcul différentiel</b>                          | <b>829</b> |
| <b>25 Initiation au calcul différentiel</b>                   | <b>837</b> |
| I Arcs plans et courbes planes . . . . .                      | 841        |
| II Étude des courbes planes . . . . .                         | 847        |
| III Les courbes en coordonnées polaires . . . . .             | 860        |
| IV Continuité des fonctions à 2 ou 3 variables . . . . .      | 864        |
| V Calcul différentiel à 2 et 3 variables . . . . .            | 871        |
| VI Exercices . . . . .  | 887        |
| VII Fiche-résumé . . . . .                                    | 889        |

|  |             |
|--|-------------|
| <b>26 Équations différentielles ordinaires</b>   | <b>891</b>  |
| I Équations linéaires du premier ordre . . . . . | 892         |
| II Équations linéaires d'ordre 2 . . . . .       | 903         |
| III Exercices . . . . .                          | 915         |
| IV Fiche-résumé . . . . .                        | 916         |
| <br>   |             |
| <b>Partie V Probabilités</b>                     | <b>917</b>  |
| <br>   |             |
| <b>27 Probabilités</b>                           | <b>921</b>  |
| I Espace probabilisé . . . . .                   | 921         |
| II Variables aléatoires réelles . . . . .        | 941         |
| III Exercices . . . . .                          | 965         |
| IV Fiche-résumé . . . . .                        | 967         |
| Complément Le théorème limite central . . . . .  | 968         |
| <br>   |             |
| <b>Partie VI Solutions des tests</b>             | <b>971</b>  |
| <br>   |             |
| <b>Partie VII Solutions des exercices</b>        | <b>1009</b> |
| <br>   |             |
| <b>Index</b>                                     | <b>1075</b> |