

Sommaire

Notations	22	IV Théorèmes limites	
Introduction	24		
I Introduction heuristique		19 Convergences	383
1 Probabilités (heuristique)	31	20 Loi des grands nombres	417
2 Variable aléatoire (heuristique)	55	21 Le théorème limite central	437
		22 Techniques d'approximations	447
		23 Espérance conditionnelle	469
II Théorie et Pratique		V Quelques applications	
3 Espaces probabilisé	77	24 Résultats élégamment établis...	495
4 Conditionnement	101	25 Simuler informatiquement une loi	511
5 Indépendance (1/2)	111	26 Méthodes de Monte-Carlo	533
6 Variables aléatoires discrètes	127	27 Chaînes de Markov	551
7 Espérance de v.a. discrètes	143	28 Arithmétique et probabilités	579
8 Couples de v.a. discrètes	173	29 Bosons, fermions et boltzmannions	589
9 Le jeu de <i>pile</i> ou <i>face</i>	203	30 Processus de Poisson	603
10 Variables aléatoires à densité	223	31 Mouvements browniens	611
11 Espérance d'une v.a. à densité	245	32 Estimation bayésienne	643
12 Couples de v.a. à densité	257	33 Loi de l'Arc sinus et séries aléatoires	647
		34 À propos de quelques paradoxes	655
III Plus formellement...		A Annexes	
13 Variables aléatoires (cas général)	291	A Éléments d'analyse et d'algèbre	667
14 L'espérance comme intégration...	307	B Davantage sur la mesure	697
15 Vecteurs aléatoires	331	C Théorèmes d'existence	711
16 Indépendance (2/2)	341	D Tables	717
17 Fonctions caractéristiques	357	E Lexique français-anglais	721
18 Vecteurs gaussiens (*)	365		

Table des matières

Introduction	24
§ 1. Les lois du hasard	24
§ 2. But de la théorie	25
§ 3. Quelques mots sur l'ouvrage	26
§ 4. Rosencrantz et Guildenstern	27
<i>Exercice</i>	28
Partie I : Introduction heuristique	29
1 Probabilités (heuristique)	31
1.1 Le langage de l'aléatoire	31
§ 5. Phénomènes aléatoires	31
§ 6. L'univers Ω et les réalisations possibles du hasard	33
§ 7. Événements	35
§ 8. Compter/mesurer	35
§ 9. Langage ensembliste	37
§ 10. Calcul des probabilités	38
1.2 Probabilités sur un ensemble fini ou dénombrable	39
§ 11. Univers fini	39
§ 12. Probabilités sur un ensemble dénombrable	42
1.3 Probabilités sur $\{P, F\}^{\mathbb{N}^*}$	42
§ 13. Un univers non dénombrable	42
§ 14. Unions dénombrables d'événements	44
§ 15. Unions non dénombrables d'événements	45
§ 16. Probabilité sur $\{P, F\}^{\mathbb{N}}$	45
1.4 Probabilités conditionnelles	45
§ 17. Un exemple simple	45
§ 18. Second exemple	46
§ 19. Formule des probabilités totales	47
§ 20. Formule des probabilités composées	48
§ 21. Indépendance stochastique	48
§ 22. « Indépendance = produit » (*)	49
<i>Exercices</i>	50
2 Variables aléatoires (heuristique)	55
2.1 Variables réelles	56
§ 23. Première définition	56
§ 24. Probabilité image (ou loi)	57
§ 25. Fonction de répartition	58
§ 26. Extension de la notion de variables aléatoires	60
§ 27. Variables discrètes	61
§ 28. Variables à densité	62

§ 29. Est-ce tout ?	64
§ 30. La connaissance de Ω est inutile	65
2.2 La notion d'espérance	65
§ 31. Points de vue du théoricien, point de vue de l'expérimentateur	65
§ 32. Le problème de la sommation	67
2.3 Espérance d'une variable discrète ou à densité	68
§ 33. Cas discret : première (tentative de) définition	68
§ 34. Deux expériences numériques	68
§ 35. Séries commutativement convergentes	70
§ 36. Seconde définition	71
§ 37. Espérance d'une variable à densité	72
<i>Exercices</i>	72

Partie II : Théorie et Pratique 75

3 Espaces probabilisés	77
3.1 Parties, algèbres, tribus	78
§ 38. Unions disjointes	78
§ 39. Algèbres	78
§ 40. Tribus	79
§ 41. Borne supérieure et borne inférieure	79
§ 42. Autres propriétés des tribus	80
§ 43. Construire une tribu. Tribu engendrée par un ensemble de parties	81
3.2 Espaces probabilisés	82
§ 44. Espaces probabilisables	82
§ 45. Espaces probabilisés	84
§ 46. Propriétés des mesures de probabilités	85
§ 47. Événements négligeables	87
§ 48. Espaces probabilisés complets (*)	87
§ 49. Systèmes complets, quasi-complets d'événements	88
§ 50. Formule du crible (ou : de Poincaré)	89
3.3 Probabilité sur \mathbb{R}	90
§ 51. Fonction de répartition d'une probabilité	90
§ 52. La mesure de Lebesgue sur $[0; 1]$	92
§ 53. Probabilités finies	92
§ 54. Probabilités discrètes	93
§ 55. Probabilités à densité	93
3.4 Annexe : π -systèmes et théorème de Carathéodory	94
§ 56. π -systèmes	94
§ 57. Le théorème de Carathéodory	94
3.5 Annexe : un ensemble non mesurable	95
<i>Exercices</i>	96
4 Conditionnement	101
§ 58. Probabilités conditionnelles	101
§ 59. Formule des probabilités composées	103
§ 60. Formule des probabilités totales	103
§ 61. Théorème de Bayes	104
§ 62. Quelques remarques et difficultés	106
<i>Exercices</i>	108

5	Indépendance (1/2)	111
5.1	Indépendance d'événements et de tribus	111
	§ 63. Indépendance de deux événements	111
	§ 64. Indépendance mutuelle	112
5.2	Les lemmes de Borel-Cantelli	114
	§ 65. Limite supérieure et limite inférieure	114
	§ 66. Les lemmes de Borel-Cantelli	117
5.3	Application : du jeu de recouvrement au paradoxe d'Olbers	119
	§ 67. Le paradoxe historique d'Olbers	119
	§ 68. Un modèle bidimensionnel de recouvrement	120
	§ 69. Modèle stellaire uniforme : probabilité que le cercle...	121
	<i>Exercices</i>	123
6	Variables aléatoires discrètes	127
6.1	Variables aléatoires discrètes	127
	§ 70. Variable simple, variable discrète	127
	§ 71. Système complet induit par une variable aléatoire discrète	128
	§ 72. Loi d'une variable aléatoire discrète	129
	§ 73. Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète	130
	§ 74. Histogrammes	131
	§ 75. Variables aléatoires au sens large	132
6.2	Lois classiques	133
	§ 76. Loi uniforme	133
	§ 77. Loi de Bernoulli	133
	§ 78. Loi binomiale	134
	§ 79. Loi géométrique	134
	§ 80. Loi de Poisson	136
	§ 81. Tirages avec et sans remise. Loi hypergéométrique	139
	§ 82. Loi de l'image $\varphi(X)$ d'une variable aléatoire	140
	<i>Exercices</i>	141
7	Espérance d'une variable aléatoire discrète	143
7.1	Espérance	143
	§ 83. Espérance	143
	§ 84. Représentations de X comme combinaisons de fonctions indicatrices	145
	§ 85. Espérances infinies	147
	§ 86. Linéarité	148
	§ 87. Application de la linéarité au calcul pratique d'une espérance	149
	§ 88. Autres propriétés de l'espérance	150
	§ 89. Intégration terme à terme	151
7.2	Moments	152
	§ 90. Formule de transfert	152
	§ 91. Moments	152
	§ 92. Moments centrés	152
	§ 93. Variance, écart-type	153
	§ 94. Propriétés de la variance	156
	§ 95. Variable centrée réduite	156
	§ 96. Inégalité de Cauchy-Schwarz	156
	§ 97. Espérance et variance des lois classiques	157
	§ 98. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev	157
	§ 99. Atouts et faiblesses de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev	159

7.3	Fonctions génératrices	160
	§ 100. Fonction génératrice	160
	§ 101. Récupération des moments	161
	§ 102. Fonctions génératrices des lois classiques	162
7.4	Un problème classique : le collectionneur	163
	§ 103. Position du problème	163
	§ 104. Loi du temps d'attente	164
	§ 105. Une majoration de la probabilité de déviation	165
	<i>Exercices</i>	166
8	Couples de variables aléatoires discrètes	173
	§ 106. Position du problème	173
8.1	Loi d'un couple	174
	§ 107. Loi conjointe, lois marginales	174
	§ 108. Lois conditionnelles	175
	§ 109. Somme de deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{Z}	176
	§ 110. Théorème de transfert	176
8.2	Indépendance	177
	§ 111. Indépendance de deux variables aléatoires discrètes	177
	§ 112. Indépendance mutuelle	178
	§ 113. Fonctions de variables indépendantes	179
	§ 114. Un exemple : minimum et maximum de variables indépendantes	180
	§ 115. Espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes	181
	§ 116. Somme de variables indépendantes — formule de convolution	182
	§ 117. Loi binomiale comme somme de lois de Bernoulli	182
	§ 118. Théorèmes de stabilité	183
8.3	Covariance	183
	§ 119. Covariance d'un couple discret	183
	§ 120. Somme de variables aléatoires	185
	§ 121. Coefficient de corrélation	187
	§ 122. Invariance par changement d'échelle de $\rho(X, Y)$	187
	§ 123. Covariance d'un couple de données statistiques	188
8.4	Espérance conditionnelle (cas discret)	189
	§ 124. Lois conditionnelles	189
	§ 125. Espérance conditionnelle, première approche	190
	§ 126. Espérance conditionnelle, seconde approche	191
8.5	Sommation d'un nombre aléatoire de variables	192
	§ 127. Contexte historique et mathématique	192
	§ 128. Identités de Wald	193
	§ 129. Processus de Galton-Watson	195
	§ 130. Probabilité d'extinction	196
	§ 131. Évolution de la population	197
	<i>Exercices</i>	198
9	Le jeu de pile ou face	203
9.1	Formalisation	203
	§ 132. Espace probabilisé associé à une partie infinie de <i>pile</i> ou <i>face</i>	203
	§ 133. Quelques notations	204
9.2	Le motif dans le tapis	205
	§ 134. Longueur moyenne de la deuxième séquence homogène	205
	§ 135. Vaut-il mieux parier FPP ou PPF ?	206

§ 136. Occurrence de motifs, événements régénératifs	207
§ 137. Temps d'attente d'un des motifs PPF et FPP	209
§ 138. Temps d'attente du motif PPP	210
9.3 Théorèmes limites	211
§ 139. Une certitude : la moyenne	211
§ 140. Retour à l'équilibre et marches aléatoires	213
9.4 Les nombres normaux existent !	215
§ 141. Une suite de variables de Bernoulli indépendantes est un réel de $[0; 1[$ (et vice-versa)	215
§ 142. Propriétés des fonctions de Rademacher	216
§ 143. Le théorème des nombres normaux de Borel	218
§ 144. Existence de nombres complètement normaux	218
<i>Exercices</i>	220
10 Variables aléatoires à densité	223
§ 145. À propos de l'intégrabilité des fonctions	223
10.1 Variables aléatoires à densité	224
§ 146. Variables continues	224
§ 147. Variables absolument continues, ou à densité	224
§ 148. Propriétés de la densité de probabilité	227
§ 149. Changement d'échelle	227
§ 150. Médiane	228
§ 151. Variables symétriques	229
10.2 Lois classiques	229
§ 152. Loi uniforme	229
§ 153. Loi exponentielle	230
§ 154. Loi normale centrée réduite	231
§ 155. Loi normale	232
§ 156. Loi de Cauchy	234
§ 157. Loi Γ (Gamma)	235
§ 158. Loi γ	235
§ 159. Loi du χ^2	235
§ 160. Loi bêta $B(a, b)$	235
10.3 Changement de variable aléatoire	237
§ 161. Loi de $\varphi(X)$ lorsque φ est injective	237
§ 162. Loi de $\varphi(X)$: cas général	238
§ 163. Simuler une loi à densité	239
<i>Exercices</i>	241
11 Espérance d'une variable aléatoire à densité	245
11.1 Espérance et moments	245
§ 164. Espérance	245
§ 165. Formule de transfert	246
§ 166. Moments	247
§ 167. Moments centrés	247
§ 168. Variance	248
§ 169. Inégalité de Cauchy-Schwarz	249
§ 170. Espérance et variance des lois classiques	249
§ 171. Variables centrées réduites	252
§ 172. Autres caractéristiques numériques d'une variable aléatoire à densité	252

11.2	Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev	253
	§ 173. Inégalité de Markov	253
	§ 174. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev	253
	<i>Exercices</i>	254
12	Couples de variables à densité	257
12.1	Loi d'un couple	257
	§ 175. Loi d'un couple, lois marginales	257
	§ 176. Couple admettant une densité	258
	§ 177. Densités marginales	261
	§ 178. Somme de deux variables aléatoires à densité	261
	§ 179. Théorème de transfert	263
12.2	Indépendance	263
	§ 180. Indépendance de deux variables aléatoires à densité	263
	§ 181. Indépendance mutuelle	264
	§ 182. Somme de deux variables aléatoires indépendantes	265
	§ 183. Somme de lois normales indépendantes	266
	§ 184. Un exemple : quotient de deux lois normales	266
	§ 185. Maximum et minimum de N variables aléatoires indépendantes	267
	§ 186. Espérance du produit de variables indépendantes	268
12.3	Covariance	269
	§ 187. Covariance d'un couple à densité	269
	§ 188. Coefficient de corrélation	270
12.4	Lois conditionnelles	271
	§ 189. Lois conditionnelles	271
	§ 190. Exemple de variable conditionnée par une autre	274
	§ 191. Un exemple de loi mixte (discret, continu) : temps d'attente du métro	274
	§ 192. Espérances conditionnelles	277
	<i>Exercices</i>	278
	Partie III : Plus formellement...	289
13	Variables aléatoires : cas général	291
13.1	Mesurabilité	291
	§ 193. Définition d'une variable aléatoire	291
	§ 194. Calcul des images réciproques	292
	§ 195. Quelques résultats sur la mesurabilité	292
13.2	Fonction de répartition	294
	§ 196. Loi d'une variable aléatoire	294
	§ 197. Fonction de répartition	294
	§ 198. Variables discrètes, continues, mixtes	296
	§ 199. Décomposition de Lebesgue d'une fonction de répartition	297
	§ 200. Densité au sens des distributions	299
	§ 201. Une définition de l'espérance n'utilisant que la fonction de répartition	300
	§ 202. L'espérance et les notations de l'intégrale de Stieltjes	301
13.3	Limite simple de variables aléatoires	302
	<i>Exercices</i>	304

14 L'espérance comme intégration sur une mesure de probabilité	307
14.1 Construction de l'espérance comme intégrale	308
§ 203. Espérance d'une variable aléatoire simple	308
§ 204. Espérance d'une variable aléatoire positive	309
§ 205. Espérance comme limite croissante d'une suite de variables simples (*)	309
§ 206. Espérance d'une variable aléatoire réelle	310
§ 207. Espérance d'une variable aléatoire complexe	311
§ 208. Propriétés de l'espérance; espace \mathcal{L}^1	311
§ 209. Intégration sur une partie	313
§ 210. Espaces \mathcal{L}^1 et L^1	313
§ 211. Moments d'ordre supérieur	314
14.2 Théorèmes de convergence	315
§ 212. Théorème de convergence monotone	315
§ 213. Lemme de Fatou (*)	315
§ 214. Théorème de convergence dominée	316
§ 215. La Cavalerie Légère à l'œuvre	317
14.3 Le théorème de transfert et ses applications	318
§ 216. Le théorème général	318
§ 217. Cas des variables à densité	319
14.4 Espace L^2 ; interprétations géométriques	321
§ 218. Espaces \mathcal{L}^2 et L^2	321
§ 219. Inégalité de Cauchy-Schwarz	321
§ 220. Covariance	322
§ 221. Structure de l'espace L^2	323
§ 222. Interprétations géométriques	324
§ 223. Meilleur estimateur quadratique d'une variable aléatoire	325
14.5 Inégalités	326
§ 224. Inégalité de Markov	326
§ 225. Inégalités de Bienaymé-Tchebychev	327
§ 226. Inégalité de Bernstein	328
§ 227. Inégalité de Jensen (convexité)	328
14.6 Annexe : le théorème de convergence monotone	329
<i>Exercices</i>	329
15 Vecteurs aléatoires	331
§ 228. Notations	331
15.1 Probabilités sur \mathbb{R}^n	332
§ 229. Boréliens de \mathbb{R}^n	332
§ 230. Probabilité produit	332
§ 231. Densités	332
15.2 Vecteurs aléatoires	332
§ 232. Espérance	333
§ 233. Matrice de covariance	333
§ 234. Inégalité de Cauchy-Schwarz	334
15.3 Fubini !!!	335
§ 235. Le théorème de Fubini en pratique	335
§ 236. Application : densités marginales	335
§ 237. Application : expression alternative de l'espérance	336
15.4 Changements de variables aléatoires	337
§ 238. Changement de vecteur aléatoire	337
§ 239. Somme, produit et quotient de deux variables aléatoires	338
<i>Exercices</i>	339

16 Indépendance (2/2)	341
16.1 Indépendance de variables aléatoires	341
§ 240. Indépendance de deux variables aléatoires	341
§ 241. Indépendance de classes et de tribus d'événements	343
§ 242. Indépendance de n variables aléatoires	344
§ 243. Caractérisations de l'indépendance de variables aléatoires	344
§ 244. Coalitions	344
§ 245. Indépendance de variables aléatoires discrètes	345
§ 246. Indépendance de variables aléatoires à densité	345
16.2 Somme et produit de variables aléatoires indépendantes	346
§ 247. Espérance d'un produit	346
§ 248. Formule de convolution	348
§ 249. Formule de convolution pour les variables à densité	349
§ 250. Somme de n variables aléatoires indépendantes	350
16.3 Temps d'arrêt et identité de Wald	350
§ 251. Notion de temps d'arrêt	350
§ 252. Temps d'arrêt et identités de Wald	351
<i>Exercices</i>	353
17 Fonctions caractéristiques	357
§ 253. Variables aléatoires complexes	357
§ 254. Fonction caractéristique	358
§ 255. Cas des variables aléatoires discrètes	359
§ 256. Propriétés de la fonction caractéristique	359
§ 257. Fonction caractéristique d'une somme de variables indépendantes	360
§ 258. Théorème d'unicité	360
§ 259. Fonction caractéristique et indépendance	361
§ 260. Régularité de la fonction caractéristique	361
§ 261. Fonctions caractéristiques usuelles	362
§ 262. Le théorème de continuité de Paul Lévy	362
<i>Exercices</i>	363
18 Vecteurs gaussiens	365
18.1 Lois normales sur \mathbb{R}^2	365
§ 263. Lois normales et extension	365
§ 264. Lois normales sur \mathbb{R}^2 : cas non dégénéré	366
§ 265. Réduction d'une loi normale non dégénérée sur \mathbb{R}^2	368
18.2 Aspects numériques de lois normales sur \mathbb{R}^2	370
§ 266. Lois marginales	370
§ 267. Combinaisons linéaires de X et Y	371
§ 268. Densités conditionnelles	372
§ 269. Ellipses d'égale densité	372
18.3 Vecteurs gaussiens	374
§ 270. Définition des vecteurs gaussiens	374
§ 271. Caractérisation par les combinaisons linéaires	374
§ 272. Indépendance et décorrélation	375
§ 273. Décomposition d'un vecteur gaussien	375
§ 274. Densité d'un vecteur gaussien	377
§ 275. Ellipsoïdes d'égale densité et loi du χ^2	378
§ 276. Lemme des moments (théorème de Wick)	378
<i>Exercices</i>	379

Partie IV : Théorèmes limites		381
19 Convergence		383
§ 277. Introduction aux théorèmes limites		383
19.1 Convergence presque sûre, convergence en probabilité		385
§ 278. Convergence presque sûre		385
§ 279. Critères de convergence presque sûre (*)		386
§ 280. Convergence en probabilité		388
§ 281. Une caractérisation par l'espérance		388
§ 282. Convergence et images de variables aléatoires		389
§ 283. Comparaison entre convergence en probabilité et convergence p.s.		389
§ 284. Une distance sur l'espace des variables aléatoires (*)		391
19.2 Convergence en moyenne et dans L^p		392
§ 285. Convergence en moyenne et dans L^p		392
§ 286. Convergence en probabilité et convergence dans L^p (*)		392
19.3 Convergence en loi		393
§ 287. Convergence en loi		393
§ 288. Convergence en loi <i>versus</i> convergence étroite		394
§ 289. Convergence en loi et convergence en probabilité		396
§ 290. Convergence en loi de variables discrètes		396
§ 291. Convergence en loi de variables à densité		399
§ 292. Convergence en loi et fonctions caractéristiques		401
§ 293. Convergence en loi vers une constante		401
§ 294. Convergence en loi d'un couple, théorème de Slutsky		402
19.4 Une application : produit scalaire de vecteurs unitaires aléatoires		403
§ 295. Vecteur aléatoire sur la sphère S_n		403
§ 296. Loi du produit scalaire		403
§ 297. Loi limite		404
19.5 Seconde application : suites équadistribuées		405
§ 298. Suites équadistribuées		405
§ 299. Critère de Weyl		405
§ 300. Application aux suites $(n\alpha \bmod 1)$		407
19.6 Résumé synoptique		409
19.7 Annexe : convergence étroite		410
§ 301. Théorème de représentation de Skorokhod		410
§ 302. Équivalence de la convergence en loi et de la convergence étroite		410
Exercices		412
20 Loi des grands nombres		417
20.1 La loi du tout ou rien		417
§ 303. Événements de queue, tribu asymptotique		417
§ 304. Loi du 0-1 de Kolmogorov		419
§ 305. Loi du tout ou rien pour les événements		420
§ 306. Loi du tout ou rien de Hewitt-Savage (*)		420
§ 307. Une application aux séries aléatoires		421
§ 308. Une application aux marches aléatoires		421
20.2 Lois des grands nombres		423
§ 309. La loi faible des grands nombres		424
§ 310. La loi forte des grands nombres		425
§ 311. Cas de la divergence (*)		427
20.3 Théorème de Glivenko-Cantelli		428

§ 312. Fonction de répartition empirique	428
§ 313. Application : le test de Kolmogorov-Smirnov	430
20.4 Annexe : démonstration de la loi des grands nombres	432
<i>Exercices</i>	434
21 Le théorème limite central	437
§ 314. Au-delà de la loi des grands nombres	437
§ 315. Le théorème limite central	438
§ 316. Autres formes du théorème limite central (*)	440
§ 317. Forme locale du théorème limite central	441
§ 318. Évaluation de la vitesse de convergence	442
§ 319. Extension aux variables vectorielles (*)	443
§ 320. Utilité du théorème limite central	443
§ 321. La physique et la loi du $1/\sqrt{n}$	443
§ 322. Au-delà du théorème limite central : la loi du logarithme itéré	444
<i>Exercices</i>	446
22 Techniques d'approximation	447
22.1 Approximations poissoniennes	447
§ 323. Convergence vers une loi de Poisson	447
§ 324. Approximation poissonienne d'une loi binomiale	448
22.2 Approximation normale	449
§ 325. Approximation normale d'une loi binomiale ; correction de continuité	449
§ 326. Approximation normale d'une loi de Poisson	451
§ 327. Approximation normale et inégalité de Bienaymé-Tchebychev	452
§ 328. Estimer un nombre de lancers nécessaires	453
§ 329. Résumé des conditions d'approximation	456
22.3 Régression linéaire	456
§ 330. Droite de régression	456
§ 331. Droite de régression par rapport à y	457
§ 332. Corrélation et causalité	459
22.4 Estimation	460
§ 333. Un exemple : moyenne empirique	460
§ 334. Un exemple : variance empirique	460
§ 335. Notion d'estimateur	462
§ 336. Risque quadratique	462
§ 337. Intervalles de confiance	463
<i>Exercices</i>	464
23 Espérance conditionnelle	469
23.1 Le cas fini ou dénombrable	469
§ 338. Espérance conditionnelle sachant une partition	470
§ 339. Un autre point de vue	471
§ 340. La propriété fondamentale de l'espérance conditionnelle	472
§ 341. Propriétés élémentaires	472
§ 342. Espérance conditionnelle sachant une variable aléatoire discrète	474
§ 343. Fonctions mesurables selon une partition dénombrable	475
23.2 Le cas général	476
§ 344. Espérance d'une variable aléatoire sachant un événement	476
§ 345. Espérance conditionnelle sachant une tribu	476
§ 346. Espérance conditionnelle sachant une variable aléatoire	478

§ 347. Lemme de factorisation	478
§ 348. Propriétés de l'espérance conditionnelle	478
§ 349. Théorèmes de convergence	479
§ 350. Densités conditionnelles (*)	480
§ 351. Le point de vue hilbertien : l'espérance conditionnelle comme projection	480
23.3 Martingales	482
§ 352. Ma première martingale	482
§ 353. Filtrations, martingales	482
§ 354. Sur- et sous-martingales	484
§ 355. Théorème de convergence des martingales	484
§ 356. Applications	487
23.4 Annexe : probabilités conditionnelles (*)	487
§ 357. Probabilité conditionnelle sachant une partition dénombrable	487
§ 358. Probabilité conditionnelle sachant une variable aléatoire	488
§ 359. Probabilité conditionnelle sachant une tribu	488
Exercices	489

Partie V : Quelques applications 493

24 Quelques résultats établis par la théorie des probabilités	495
§ 360. La formule de Bernstein	495
§ 361. L'existence de nombres complètement normaux	498
§ 362. Points singuliers du cercle de convergence d'une série entière	499
§ 363. Le théorème de Weierstrass et les polynômes de Bernstein	501
§ 364. En guise de conclusion	506
Exercices	506
25 Simuler informatiquement une loi de probabilité	511
25.1 Simuler une loi discrète	511
§ 365. Simuler une loi de Bernoulli	512
§ 366. Simuler une loi binomiale	512
§ 367. Simuler une loi discrète finie	512
§ 368. Simuler une loi géométrique	513
§ 369. Simuler une loi de Poisson	514
25.2 Simuler une loi continue	515
§ 370. Méthode de l'inverse	515
§ 371. Méthode du rejet	516
§ 372. Mélange de fonctions de répartition	518
25.3 Simuler une loi normale	520
§ 373. Méthode découlant du théorème limite central	520
§ 374. Méthode de la transformée inverse	520
§ 375. Méthode de Box-Muller	520
§ 376. Simulation d'une loi normale par la méthode du rejet	522
§ 377. Simulation d'un vecteur gaussien sur \mathbb{R}^2	523
25.4 Remarques sur les générateurs d'une loi uniforme	525
§ 378. Remarques préliminaires	525
§ 379. Générateur à récurrence linéaire	527
§ 380. Récurrences d'ordre supérieur, ou non linéaires	528
§ 381. Brève remarque historique	529
Exercices	530

26 Méthodes de Monte-Carlo	533
26.1 Estimation d'une moyenne	534
§ 382. L'aiguille de Buffon	534
26.2 Intégration numérique	536
§ 383. Position du problème	536
§ 384. Convergence de la méthode	539
§ 385. Effet de la dimension	539
26.3 Laissons faire le hasard !	540
§ 386. Un exemple arithmétique : tests de primalité	540
§ 387. Une machine à deviner des conjectures : le modèle de Cramér	544
§ 388. Le hasard et les algorithmes de recherche de solution optimale	545
§ 389. Falsification de données comptables et la loi de Benford	546
<i>Exercices</i>	549
27 Chaînes de Markov	551
27.1 Matrices de transition	551
§ 390. Matrices de transition, chaînes de Markov	552
§ 391. Mise en garde : probabilités conditionnelles et mémoire du passé	554
§ 392. Graphe associé à une chaîne de Markov	554
§ 393. Propriétés des matrices stochastiques	555
§ 394. Mesures sur l'espace des états	555
§ 395. Évolution à n pas et équation de Chapman-Kolmogorov	556
§ 396. Évolution du système aux grandes échelles de temps	557
27.2 Classification immédiate des états	559
§ 397. États communicants	559
§ 398. Notion de classes. Graphes et matrices irréductibles.	561
§ 399. Parties fermées. États absorbants	562
§ 400. Périodicité	563
§ 401. Ergodicité (irréductibilité forte)	564
§ 402. Théorème de Perron-Frobenius et théorème ergodique	565
27.3 Classification asymptotique des états	567
§ 403. États transitoires, états récurrents	567
§ 404. Matrice réduite	568
27.4 Méthode « un pas en avant »	569
§ 405. Temps moyen de retour	569
§ 406. Temps moyen d'atteinte d'une partie	570
§ 407. Temps de retour et loi stationnaire	570
§ 408. Probabilité d'absorption	571
27.5 Trois exemples	572
§ 409. Attente d'un motif dans le jeu de <i>pile</i> ou <i>face</i>	572
§ 410. Une chaîne réductible	573
§ 411. Le modèle des urnes d'Ehrenfest	574
<i>Exercices</i>	575
28 Arithmétique et probabilités : une randonnée	579
28.1 Exemple élémentaire	580
28.2 Le théorème d'Erdős-Kac et la loi normale	581
28.3 Écarts entre nombres premiers et lois de Poisson	583
28.4 Valeurs propres de matrices aléatoires	585

29 Bosons, fermions et boltzmannions	589
29.1 Le facteur de Boltzmann	589
§ 412. Théorie cinétique des gaz et statistiques non quantiques	589
§ 413. « Nombre de complexions » d'un état	591
§ 414. Un exemple (très) élémentaire	592
§ 415. Le facteur de Boltzmann	593
29.2 Statistiques quantiques	596
§ 416. L'entropie et le paradoxe de Gibbs	596
§ 417. Fermions et bosons	598
§ 418. Nombre d'états occupés	600
30 Processus de Poisson	603
§ 419. Introduction : comment placer des points uniformément sur \mathbb{R}^+ ?	603
§ 420. Processus de comptage	604
§ 421. Processus de Poisson	604
§ 422. Caractérisation des processus de Poisson	605
§ 423. Processus marqués	606
§ 424. Distribution des instants d'arrivée	607
§ 425. Effet physique : le bruit de grenaille	607
§ 426. Âge et temps de vie résiduel	607
§ 427. Processus de Poisson sur \mathbb{R}	608
§ 428. Processus de Poisson sur \mathbb{R}^d	609
<i>Exercices</i>	609
31 Mouvements browniens	611
31.1 Une approche heuristique	611
§ 429. L'observation de Robert Brown	611
§ 430. Marche aléatoire discrète et passage à la limite continue	612
§ 431. Limite continue — première approche	613
§ 432. Limite continue — seconde approche	614
§ 433. Une propriété du noyau de la chaleur	616
§ 434. Limite continue d'une marche aléatoire asymétrique	617
§ 435. Marche aléatoire en dimension supérieure	617
§ 436. Temps moyen de visite	618
§ 437. Dernières remarques	619
31.2 Modélisation probabiliste	620
§ 438. Définition	621
§ 439. La loi du mouvement brownien est la loi limite de marches aléatoires . .	622
§ 440. Loi du mouvement brownien ; mesure de Wiener	623
§ 441. Construction canonique du mouvement brownien	624
§ 442. Covariance	625
31.3 Propriétés des chemins browniens	626
§ 443. Invariances	626
§ 444. Propriétés de régularité	626
§ 445. Récurrence : le théorème de Pólya	627
§ 446. Autres propriétés (*)	627
§ 447. Construction de Lévy-Ciesielski du mouvement brownien	628
31.4 Mouvement brownien, physique et potentiels	630
§ 448. Le modèle d'Einstein et la détermination du nombre d'Avogadro	630
§ 449. Problème de Dirichlet et méthode de Monte-Carlo	630
§ 450. Mouvement brownien et potentiel capacitif	633

§ 451. Théorie du potentiel et propriétés de récurrence ($d = 1$)	633
§ 452. Théorie du potentiel et propriétés de récurrence ($d = 2$)	634
§ 453. Théorie du potentiel et propriétés de récurrence ($d \geq 3$)	635
31.5 Annexes	637
§ 454. Détermination du noyau de la chaleur	637
§ 455. Démonstration du théorème de Paley-Wiener-Zygmund	637
<i>Exercices</i>	<i>639</i>
32 Estimation bayésienne	643
§ 456. Distribution <i>a priori</i> uniforme, et distribution <i>a posteriori</i>	643
§ 457. Choix d'une autre distribution <i>a priori</i>	646
<i>Exercices</i>	<i>646</i>
33 Retour à pile ou face : loi de l'Arc sinus et séries aléatoires	647
33.1 L'iniquité flagrante d'un jeu équitable	647
§ 458. La loi de l'Arc sinus	647
33.2 Séries harmoniques de signe aléatoire	649
§ 459. Cas d'une pièce déséquilibrée	649
§ 460. Cas équilibré	650
33.3 Rayon d'une série entière aléatoire	651
§ 461. Le rayon est presque sûrement constant	651
§ 462. Trois rayons sont possibles	652
34 À propos de quelques paradoxes	655
34.1 Biais d'équiprobabilité	655
§ 463. Biais d'équiprobabilité : le paradoxe des deux cassettes	655
§ 464. Le problème de Monty Hall	656
§ 465. Retour au problème des deux cassettes	657
34.2 Problèmes dus à l'interprétation de l'espérance	658
§ 466. L'espérance d'un jeu n'est pas un critère suffisant	658
§ 467. Paradoxe de Saint-Petersbourg	658
34.3 Pseudo-paradoxes	661
§ 468. Le paradoxe de Walter Penney	661
<i>Exercices</i>	<i>662</i>

Annexes

A Éléments d'analyse et d'algèbre	667
A.1 Suites	667
A1. Fini, dénombrable, indénombrable	667
A2. Limite supérieure, limite inférieure	668
A3. Suites de Cauchy	668
A4. Comparaison de suites	669
A5. Formule de Stirling	669
A.2 Séries numériques	669
A6. Définitions	669
A7. Séries positives	669
A8. Théorème de comparaison de séries positives	670
A9. Produits infinis	670
A10. Convergence absolue	670
A11. Exponentielle complexe	670
A12. Changement d'ordre de sommation	671
A13. Familles sommables positives	672

A14. Familles sommables de signes quelconques	672
A15. Théorème de Fubini pour les séries doubles	672
A16. Sommation par paquets	674
A17. Théorème de convergence dominée discrète	674
A.3 Fonctions	674
A18. Continuité, continuité à droite	674
A19. Fonctions à variation bornée	675
A20. Fonctions absolument continues	675
A21. Fonction Γ d'Euler	675
A22. Fonction d'erreur, fonction de survie de la loi normale	675
A.4 Fonctions croissantes	676
A23. Continuité, continuité à gauche, à droite	676
A24. Discontinuités de 1 ^{re} et 2 ^e espèce.	676
A25. Sauts de discontinuité d'une fonction croissante	677
A26. Régularité d'une fonction croissante	677
A27. Décomposition de Lebesgue	677
A28. Une fonction singulière : la fonction de Cantor	678
A29. Pseudo-inverse d'une fonction de répartition	679
A.5 Fonctions convexes	680
A30. Fonctions convexes, strictement convexe, concaves	680
A31. Caractérisation par la pente	681
A32. Caractérisation par la dérivée	681
A33. Cordes, tangentes et demi-tangentes	681
A34. Inégalités de Jensen	682
A.6 Modes de convergence de suites et séries de fonctions	682
A35. Convergence simple et convergence uniforme	682
A36. Théorèmes de Weierstrass	683
A37. Séries de fonctions	683
A.7 Séries entières	683
A38. Rayon	683
A39. Fonctions définies par une série entière	684
A40. Lemme radial d'Abel	684
A41. Produit de Cauchy de deux séries entières	684
A42. Quelques sommes	685
A.8 Calcul intégral	685
A43. Théorème de Fubini	685
A44. Changement de variable dans \mathbb{R}^n	686
A45. Produit de convolution	686
A46. Quelques intégrales utiles	687
A47. Méthode des multiplicateurs de Lagrange	687
A.9 Espaces de Hilbert	687
A48. Espaces préhilbertiens	687
A49. Espaces de Hilbert, bases hilbertiennes	688
A50. Théorème de projection orthogonale	689
A.10 Transformée de Fourier	689
A51. Transformée de Fourier d'une fonction intégrable	689
A52. Distributions. Distributions tempérées	689
A53. Transformée de Fourier d'une distribution	690
A.11 Dénombrément	690
A54. Coefficients binomiaux	690
A55. Formulaire pour les coefficients binomiaux	691
A56. Nombres de Stirling	691
A.12 Topologie élémentaire	693
A57. Ouverts, fermés	693
A58. Espaces complets	693
A.13 Réduction, théorème spectral	693
A59. Adjoint	693
A60. Théorème spectral	694
A61. Matrices symétriques positives, définies positives	694

A.14	Matrices positives	694
A62.	Rayon spectral	694
A63.	Matrices à coefficients positifs	694
A64.	Matrices irréductibles, matrices ergodiques	695
	Exercices	696
B	Davantage sur la mesure	697
B.1	Boréliens	697
A65.	Boréliens de \mathbb{R}	697
A66.	Boréliens de \mathbb{R}^n	699
A67.	Boréliens de \mathbb{R}^∞	699
A68.	Tribus produits, espaces produits	699
B.2	Fonctions mesurables	700
A69.	Définition et premières propriétés	700
A70.	Tribu engendrée par une variable aléatoire	701
B.3	Un complément au jeu de <i>pile</i> ou <i>face</i>	702
A71.	Additivité dénombrable de \mathbf{P}_0 sur la classe \mathfrak{C} des cylindres (*)	702
B.4	Le lemme de classe monotone	703
A72.	π -systèmes et classes monotones	703
A73.	Première application : le lemme des coalitions	705
A74.	Deuxième application : rôle central de la fonction de répartition	706
A75.	Le théorème d'extension de Carathéodory	707
B.5	Le théorème de Radon-Nikodým	707
A76.	Mesure absolument continue par rapport à une autre	707
A77.	Le théorème de Radon-Nikodým	707
	Exercices	708
C	Théorèmes d'existence	711
C.1	Quelques exemples simples de théorèmes d'existence	711
A78.	Existence d'une variable aléatoire de loi donnée	711
A79.	Un exemple de suite $(X_n)_{n \geq 0}$ de variables aléatoires indépendantes	712
A80.	Une suite de variables uniformes indépendantes	713
A81.	Une suite de variables indépendantes de lois quelconques données	714
C.2	Le théorème fondamental de Kolmogorov	714
A82.	Conditions de compatibilité et théorème d'extension	714
D	Tables	717
D.1	Langage ensembliste et langage probabiliste	717
D.2	Probabilités	718
A83.	Axiomes	718
A84.	Théorèmes d'intégration	718
A85.	Formules utiles	718
A86.	Tables des principales lois	719
A87.	Loi normale centrée réduite	720
E	Lexique français-anglais	721
	Références	723
	Index	727