

Bouchaïb Radi
Abdelkhalak El Hami

CPGE
scientifiques

1^{ère} et 2^e
années

Aide-mémoire de maths

NOUVEAUX
PROGRAMMES



ellipses

Table des matières

Partie I	Analyse	1
1	Techniques fondamentales de calcul différentiel et intégral	3
1.1	Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes	3
1.2	Primitives et équations différentielles linéaires	14
2	Nombres réels et suites numériques	23
2.1	Ensembles de nombres usuels	23
2.2	Propriété de la borne supérieure	24
2.3	Généralités sur les suites réelles	24
2.4	Limite d'une suite réelle	24
2.5	Suites monotones	26
2.6	Suites extraites	26
2.7	Traduction séquentielle de certaines propriétés	27
2.8	Suites complexes	27
2.9	Suites particulières	28
3	Fonctions d'une variable réelle: limites et continuité, dérivabilité, convexité	31
3.1	Limites et continuité	31
3.2	Dérivabilité	37
3.3	Convexité	42
4	Analyse asymptotique	45
4.1	Relations de comparaison: cas des fonctions	45
4.2	Développements limités	46
4.3	Relations de comparaison: cas des suites	49
4.4	Problèmes d'analyse asymptotique	50
5	Intégration	51
5.1	Continuité uniforme	51
5.2	Fonctions continues par morceaux	51
5.3	Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment	52
5.4	Sommes de Riemann	53
5.5	Lien entre intégrale et primitive	54
5.6	Formules de Taylor globales	58
6	Fonctions de deux variables réelles	59
6.1	Ouverts de \mathbb{R}^2 , fonctions continues	59
6.2	Dérivées partielles	60
6.3	Dérivées partielles et composées	61

6.4	Extremums	62
7	Séries numériques et vectorielles	65
7.1	Séries à valeurs dans un espace normé de dimension finie	65
7.2	Compléments sur les séries numériques	66
8	Suites et séries de fonctions, séries entières	67
8.1	Suites et séries de fonctions	67
8.2	Séries entières	69
9	Fonctions vectorielles	73
9.1	Dérivabilité en un point	73
9.2	Opérations sur les fonctions dérivables	73
9.3	Intégration sur un segment	75
9.4	Intégrale fonction de sa borne supérieure	76
9.5	Formules de Taylor	76
10	Intégration sur un intervalle quelconque	77
10.1	Intégrale généralisée sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$	77
10.2	Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$	78
10.3	Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque	78
10.4	Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables	79
10.5	Intégration des relations de comparaison	79
10.6	Convergence dominée	80
10.7	Intégration terme à terme	80
10.8	Régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre	81
11	Équations différentielles linéaires	83
11.1	Généralités	83
11.2	Solutions d'une équation différentielle linéaire	84
11.3	Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice	84
11.4	Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants	85
11.5	Variation des constantes	85
12	Calcul différentiel et optimisation	87
12.1	Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles	87
12.2	Différentielle	87
12.3	Opérations sur les applications différentiables	89
12.4	Applications de classe \mathcal{C}^1	89
12.5	Vecteurs tangents à une partie d'un espace normé de dimension finie	90
12.6	Optimisation : étude au premier ordre	90
12.7	Applications de classe \mathcal{C}^k	91
12.8	Optimisation : étude au second ordre	92
Partie II	Algèbre générale	93
13	Raisonnement et vocabulaire ensemblistes	95
13.1	Rudiments de logique	95
13.2	Ensembles	97

13.3 Applications et relations	98
14 Compléments de calcul algébrique et de trigonométrie	101
14.1 Sommes et produits	101
14.2 Résolution de petits systèmes linéaires par la méthode du pivot	102
14.3 Inégalités	104
14.4 Trigonométrie	105
15 Nombres complexes	107
15.1 Nombres complexes	107
15.2 Conjugaison et module	108
15.3 Nombres complexes de module 1 et trigonométrie	108
15.4 Forme trigonométrique	110
15.5 Équations algébriques	110
15.6 Racines n -ièmes	111
15.7 Exponentielle complexe	111
15.8 Interprétation géométrique des nombres complexes	111
16 Arithmétique dans l'ensemble des entiers relatifs	113
16.1 Divisibilité et division euclidienne	113
16.2 PGCD et algorithme d'Euclide	113
16.3 Entiers premiers entre eux	114
16.4 Nombres premiers	115
16.5 Congruences	116
17 Structures algébriques usuelles	117
17.1 Loi de composition interne	117
17.2 Structure de groupe	118
17.3 Structures d'anneau et de corps	119
18 Polynômes et fractions rationnelles	121
18.1 Anneau des polynômes à une indéterminée	121
18.2 Divisibilité et division euclidienne	122
18.3 Fonctions polynomiales et racines	123
18.4 Dérivation	124
18.5 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$	125
18.6 Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$	125
18.7 Formule d'interpolation de Lagrange	125
18.8 Fractions rationnelles	126
18.9 Décomposition en éléments simples sur \mathbb{C} et sur \mathbb{R}	126
Partie III Algèbre linéaire	129
19 Espaces vectoriels et applications linéaires	131
19.1 Espaces vectoriels	131
19.2 Espaces de dimension finie	134
19.3 Applications Linéaires	135
19.4 Sous-espaces affines d'un espace vectoriel	139

20	Matrices	141
20.1	Matrices et applications linéaires	141
20.2	Changements de bases, équivalence et similitude	143
21	Groupe symétrique et déterminants	145
21.1	Groupe symétrique	145
21.2	Déterminants	146
22	Réduction des endomorphismes et des matrices carrées	149
22.1	Compléments d'algèbre linéaire	149
22.2	Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée	150
22.3	Polynôme caractéristique	150
22.4	Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables	151
22.5	Endomorphismes et matrices carrées trigonalisables	151
22.6	Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes	151
22.7	Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice carrée	152
22.8	Lemme de décomposition des noyaux	152
22.9	Polynômes annulateurs et réduction	152
22.10	Théorème de Cayley-Hamilton et sous-espaces caractéristiques	152
Partie IV	Algèbre bilinéaire	153
23	Espaces préhilbertiens réels	155
23.1	Produit scalaire	155
23.2	Norme associée à un produit scalaire	155
23.3	Orthogonalité	156
23.4	Bases orthonormées	157
23.5	Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie	157
24	Topologie des espaces normés	159
24.1	Normes et espaces vectoriels normés	159
24.2	Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé	161
24.3	Comparaison des normes	161
24.4	Topologie d'un espace normé	162
24.5	Étude locale d'une application, continuité	163
24.6	Applications linéaires et multilinéaires continues	165
24.7	Parties compactes d'un espace normé	165
24.8	Applications continues sur une partie compacte	165
24.9	Connexité par arcs	166
24.10	Espaces vectoriels normés de dimension finie	166
25	Endomorphismes d'un espace euclidien	167
25.1	Adjoint d'un endomorphisme	167
25.2	Matrices orthogonales	167
25.3	Isométries vectorielles d'un espace euclidien	168
25.4	Isométries vectorielles en dimension 2	169
25.5	Réduction des isométries	169
25.6	Endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien	170
25.7	Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs	170

Partie V	Probabilité	172
26	Dénombrement	175
26.1	Cardinal d'un ensemble fini	175
26.2	Listes et combinaisons	176
27	Probabilités	177
27.1	Probabilités sur un univers fini	177
27.2	Variables aléatoires sur un espace probabilisé fini	179
28	Variables aléatoires discrètes	183
28.1	Espaces probabilisés	183
28.2	Probabilités conditionnelles et indépendance	183
28.3	Variables aléatoires discrètes	185
28.4	Variables aléatoires indépendantes	185
28.5	Lois usuelles	185
28.6	Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe	186
28.7	Variance d'une variable aléatoire, écart type et covariance	186
28.8	Inégalités probabilistes et loi faible des grands nombres	187
28.9	Fonctions génératrices	188
Tables statistiques		189
Index		195