

Jean-Pierre Lamoitier

# *Arithmétique* *classique*

*Exemples et exercices corrigés*

**2<sup>e</sup>**  
**édition**



# Table des matières

<b>1. Les nombres entiers .....</b>	<b>1</b>
1.1 Notations	1
1.2 Les bases de numération	1
1.3 Les opérations de base	2
1.4 Le rôle des parenthèses	13
1.5 La notion de parité	13
1.6 La preuve par neuf	14
1.7 L'élévation à la puissance	14
1.8 Extraction de racine carrée	15
1.9 L'opération factorielle	15
1.10 La primorielle	15
1.11 Relation d'ordre	16
1.12 La notion de moyenne	16
1.13 Les changements de base	16
1.14 Rappels : Les identités et inégalités remarquables	18
1.15 Exercice	19
<b>2. Quelques techniques de calcul mental et manuel .....</b>	<b>21</b>
2.1 Les identités remarquables	21
2.2 L'addition	21
2.3 La multiplication	22
2.4 Division par 5	23
2.5 Calcul sur les carrés	24
2.6 Calcul de cubes	24
2.7 Les techniques de multiplication rapide	25
2.8 Calcul approché d'une racine carrée	26
2.9 Extraction sans calculatrice d'une racine carrée	26
2.10 Extraction sans calculatrice d'une racine cubique	28
2.11 Exercices	30
<b>3. Des tours de magie mathématique .....</b>	<b>31</b>
3.1 Introduction	31
3.2 Le reste est toujours 6	31
3.3 Deviner le résultat final	31
3.4 Deviner les autres chiffres	32
3.5 Deviner les diviseurs	32
3.6 Deviner les restes	33
3.7 Multiplication donnant les mêmes chiffres	34
3.8 Double multiplication et addition	35
3.9 Somme de 10 entiers	35
3.10 Deviner le nombre imaginé par un interlocuteur	36
3.11 Deviner la date d'anniversaire	36
3.12 Retrouver le chiffre oublié	36
3.13 Extraction de tête d'une racine 5ème	37
3.14 Extraction de tête d'une racine cubique	38
3.15 Extraction d'une racine septième et neuvième	39
3.16 Le jeu de Marienbad	40

3.17	Deviner un nombre	41
3.18	Extraire une racine cubique	42
3.19	Conclusion	42
<b>4.</b>	<b>Les techniques de démonstration.....</b>	<b>43</b>
4.1	Introduction	43
4.2	Un peu de terminologie	43
4.3	La démonstration directe	43
4.4	La démonstration par récurrence	44
4.5	La démonstration par l'absurde	44
4.6	La technique de la descente infinie	45
4.7	Un théorème général de l'arithmétique	47
4.8	La vérification par ordinateur	48
4.9	Les fausses démonstrations	48
4.10	Un paradoxe intéressant	49
4.11	Exercices	50
<b>5.</b>	<b>Somme de suites de nombres entiers .....</b>	<b>51</b>
5.1	Somme des $n$ premiers nombres entiers	51
5.2	Somme des nombres impairs de $1$ à $2n + 1$ :	52
5.3	Somme des carrés des $n$ premiers nombres	52
5.4	Somme des carrés des nombres pairs de $2$ à $2n$	53
5.5	Somme des carrés des $n$ premiers nombres impairs	53
5.6	Somme des cubes des $n$ premiers nombres	53
5.7	Somme des cubes des $n$ premiers entiers pairs	54
5.8	Somme des cubes des $n$ premiers entiers impairs	54
5.9	Somme des bicarrés des $n$ premiers nombres entiers	55
5.10	Tableau récapitulatif des résultats obtenus	55
5.11	Sommes de suites alternées d'entiers	55
5.12	Somme alternée de carrés	56
5.13	Le triangle de Nicomaque	57
5.14	La relation de Jacobi	58
5.15	Exercice	59
5.16	Conclusion	60
5.17	Pour approfondir	60
<b>6.</b>	<b>La divisibilité .....</b>	<b>61</b>
6.1	Introduction	61
6.2	Reste lors d'une division	61
6.3	Reste de la division d'une somme de nombres	61
6.4	Reste de la division d'un produit de nombres	62
6.5	Le PGCD (Plus Grand Commun Diviseur)	62
6.6	Le PPCM (Plus Petit Commun Multiple)	63
6.7	Théorème de Bachet	63
6.8	Quelques théorèmes relatifs à la divisibilité	64
6.9	Notion de congruence	68
6.10	Exercices	68
<b>7.</b>	<b>Les critères de divisibilité .....</b>	<b>73</b>
7.1	Introduction	73
7.2	Divisibilité par $2, 3, 5, 6, 9$ et $18$	73
7.3	Divisibilité par $2p$ et par $5p$	73
7.4	Divisibilité par $7$	74

7.5	Divisibilité par 11	75
7.6	Divisibilité par 13	76
7.7	Divisibilité par 17	76
7.8	Divisibilité par 19	77
7.9	Divisibilité par 23	78
7.10	Divisibilité par 25	78
7.11	Divisibilité par 29	78
7.12	Divisibilité par 31	79
7.13	Divisibilité par 37	79
7.14	Divisibilité par 41	80
7.15	Divisibilité par 73	80
7.16	Divisibilité par 81	80
7.17	Divisibilité par 101	81
7.18	Divisibilité par 121	81
7.19	Divisibilité par 137	81
7.20	Un critère général	81
7.21	Théorème de Wolstenholme	82
7.22	Divisibilité de sommes ou différences de puissances impaires	82
7.23	Exercices	83
7.24	Exercices	84
7.25	Conclusion	86
<b>8.</b>	<b>Les fractions.....</b>	<b>87</b>
8.1	Définition	87
8.2	Simplification d'une fraction	87
8.3	Addition et soustraction de 2 fractions	87
8.4	Multiplication de 2 fractions	88
8.5	Division de 2 fractions	88
8.6	La simplification du cancre	88
8.7	L'addition du cancre	89
8.8	Décomposition en fractions égyptiennes	90
8.9	Conjecture d'Erdős	90
8.10	Les erreurs de simplification	91
8.11	L'approximation avec une fraction continue	91
8.12	Exercices	94
<b>9.</b>	<b>Les moyennes.....</b>	<b>101</b>
9.1	Introduction	101
9.2	La moyenne arithmétique	101
9.3	La moyenne géométrique	101
9.4	La moyenne harmonique	102
9.5	La moyenne quadratique	103
9.6	Comparaison des 4 moyennes précédentes	104
9.7	Moyenne pondérée	105
9.8	Exercices	106
9.9	Conclusion	108
<b>10.</b>	<b>Nombres premiers.....</b>	<b>109</b>
10.1	Introduction	109
10.2	Définition	109
10.3	Recherche des nombres premiers par élimination	110
10.4	Les autres méthodes	113

10.5	Les cribles géométriques	115
10.6	Recherche de très grands nombres premiers	119
10.7	La suite infinie des nombres premiers	119
10.8	Nombres premiers entre eux	124
10.9	Un tour de magie avec les nombres premiers	125
10.10	Nombres premiers jumeaux	125
10.11	La suite des nombres premiers jumeaux est-elle infinie ?	126
10.12	Récapitulation des résultats	128
10.13	Décomposition des nombres entiers	128
10.14	Décomposition en facteurs premiers	129
10.15	Théorème de Fermat et Wilson	131
10.16	Théorèmes de Sophie GERMAIN	132
10.17	La raréfaction des nombres premiers	132
10.18	Spirale d'ULAM	133
10.19	Nombres pseudo-premiers	134
10.20	Les tests de primalité	134
10.21	Autres propriétés des nombres premiers	136
10.22	Quelques problèmes amusants	136
10.23	Exercices	137
10.24	Pour approfondir	138
10.25	Conclusion	139
<b>11.</b>	<b>Les triplets et triangles pythagoriciens.....</b>	<b>141</b>
11.1	Définition	141
11.2	Triplets pythagoriciens irréductibles	141
11.3	Théorème d'infinitude	142
11.4	Une propriété curieuse	143
11.5	Triplets pythagoriciens et nombres de Fibonacci	143
11.6	Exercices	144
11.7	Triangles pythagoriciens	145
11.8	Exercices	148
11.9	Généralisation	152
11.10	Les briques de Pythagore	154
<b>12.</b>	<b>Nombres polygonaux ou figurés.....</b>	<b>161</b>
12.1	Définitions	161
12.2	Nombres triangulaires, carrés, pentagonaux, etc.	162
12.3	Nombres triangulaires	162
12.4	Les nombres triangulaires carrés	166
12.5	Inverse des nombres triangulaires	167
12.6	Les nombres proniques	168
12.7	Interprétation géométrique de la somme alternée de carrés	169
12.8	Les nombres carrés	170
12.9	Les nombres pentagonaux	173
12.10	Les nombres hexagonaux	173
12.11	Nombres étoilés et hexagonaux centrés	174
12.12	Les nombres heptagonaux	175
12.13	Les nombres octogonaux	175
12.14	Généralisation : les nombres k-gonaux	176
12.15	Les nombres trapézoïdaux	176
12.16	Les nombres polyédriques	176

12.17	Une formule curieuse	180
12.18	Les nombres gnomoniques	180
12.19	Exercices	183
12.20	Les problèmes du vol de canards	185
12.21	Carrés des nombres d'une ligne du triangle de Pascal	188
12.22	Pour approfondir	188
<b>13.</b>	<b>Nombres parfaits</b> .....	<b>189</b>
13.1	Introduction	189
13.2	Quelques définitions	189
13.3	Recherche des nombres parfaits	190
13.4	Propriétés des nombres parfaits	190
13.5	Fonction somme des diviseurs	196
13.6	Nombres unitairement parfaits	196
13.7	Nombres presque parfaits	197
13.8	Puissances de 2 et nombres presque parfaits	198
13.9	Nombres triparfaits	199
13.10	Nombres sublimes	199
13.11	Conclusion	199
<b>14.</b>	<b>Les nombres sociables</b> .....	<b>201</b>
14.1	Partie aliquote et suite aliquote	201
14.2	Définition des nombres sociables	201
14.3	Nombres amiables	202
14.4	Les nombres sociables d'ordre $n$	204
15.	Décomposition des nombres	205
<b>15.1</b>	<b>Introduction</b> .....	<b>205</b>
15.2	Décomposition en somme ou différence de carrés	205
15.3	Décomposition en somme ou différence de deux carrés	207
15.4	Décomposition en somme de cubes	212
15.5	Décomposition en somme de nombres premiers	212
15.6	Conjecture de WARING	213
15.7	Décomposition en somme de nombres figurés	214
15.8	Décomposition des carrés	216
15.9	Décomposition des nombres parfaits	217
15.10	Décomposition en somme de nombres	217
15.11	À propos du grand théorème de FERMAT	217
15.12	Conclusion	218
15.13	Pour approfondir	218
<b>16.</b>	<b>Des familles de nombres entiers</b> .....	<b>219</b>
16.1	Introduction	219
16.2	Quelques suites	219
16.3	Les Nombres de MERSENNE	220
16.4	Les nombres de Fermat	221
16.5	Les nombres de CATALAN	223
16.6	Les nombres de CARMICHAËL	225
16.7	Nombres semi-premiers	226
16.8	Nombres pseudo-premiers ou nombres de POULET	226
16.9	Les nombres de Sophie GERMAIN	227
16.10	Exercice	230

<b>17. Divers.....</b>	<b>231</b>
17.1 Introduction	231
17.2 Nombres harmoniques	231
17.3 Les nombres palindromes	232
17.4 Les nombres automorphes	233
17.5 Quelques nombres ayant de drôles de propriétés	234
17.6 Conclusions	235
<b>18. Exercices divers .....</b>	<b>237</b>
18.1 Introduction	237
18.2 L'âge du calife et l'âge du vizir	237
18.3 Comment payer l'essence	237
18.4 Trouver un entier qui soit un carré	238
18.5 Un problème de logique et de divisibilité	239
18.6 Les nouveaux lapins de FIBONACCI	240
18.7 Théorème d'Erdős et de Suranyi	241
<b>19. Suites et séries arithmétiques .....</b>	<b>243</b>
19.1 Introduction	243
19.2 Les suites récurrentes linéaires	243
19.3 Les suites récurrentes linéaires d'ordre 2	245
19.4 La suite de Pell	253
19.5 Les suites récurrentes d'ordre 3	254
19.6 Les suites de BROCAT	255
19.7 Les suites de Farey	259
19.8 Les séries de DIRICHLET	265
19.9 La fonction Zêta de RIEMANN	265
19.10 Exercice	265
19.11 Conclusion	266
19.12 Pour approfondir	266
<b>20. Les fonctions génératrices .....</b>	<b>267</b>
20.1 Définitions	267
20.2 Quelques fonctions génératrices particulières	267
20.3 Utilisation	269
20.4 Quelques fonctions génératrices particulières	273
20.5 La convolution de DIRICHLET	274
20.6 Pour approfondir	274
<b>21. Les fonctions arithmétiques.....</b>	<b>275</b>
21.1 Définition des fonctions arithmétiques	275
21.2 Classification	276
21.3 Une propriété des fonctions multiplicatives	276
21.4 Exercices	277
21.5 Indicatrice ou fonction d'Euler	278
21.6 Fonction somme des diviseurs	287
21.7 Exercices	288
21.8 Le produit de convolution de Dirichlet	290
21.9 La fonction nombre de diviseurs	290
21.10 Fonction arithmétique de GAUSS $\tau(n)$	293
21.11 Fonction delta	294
21.12 Fonction de MÖBIUS	294
21.13 Formules d'inversion de MÖBIUS	296

21.14	La fonction de MERTENS	296
21.15	La fonction Zéta de Riemann	297
21.16	La fonction de Liouville	297
21.17	La fonction partition d'un entier	298
21.18	La fonction ordre	303
21.19	La fonction de von Mangoldt	304
21.20	La fonction $\pi(n)$	304
21.21	Exercice	305
21.22	Utilisation de ces fonctions arithmétiques	305
21.23	Conclusion et perspectives	306
21.24	Pour approfondir	307
<b>22.</b>	<b>Les polynômes.....</b>	<b>309</b>
22.1	Rappel	309
22.2	Définitions	309
22.3	Quelques définitions	310
22.4	Principales propriétés des polynômes à une variable	311
22.5	Polynôme minimal d'un nombre algébrique	315
22.6	Méthode de Horner	316
22.7	Les équations polynomiales	316
22.8	Exercices	316
22.9	Les polynômes cyclotomiques	317
22.10	Pour approfondir	319
<b>23.</b>	<b>Le grand théorème de Fermat.....</b>	<b>321</b>
23.1	Énoncé	321
23.2	Premières simplifications pour la démonstration	322
23.3	Démonstration dans des cas particuliers	322
23.4	Démonstration pour $n = 4$	327
23.5	Démonstration dans le cas où $n = 3$	328
23.6	Le cas $n = 5$	331
23.7	$y$ ne peut pas être un nombre premier	331
23.8	Le théorème de Sophie GERMAIN	332
23.9	Les travaux de DIRICHLET et de KUMMER	332
23.10	La démonstration de Guy TERJANIAN	332
23.11	L'approche de Bernard RONK	332
23.12	L'extension aux nombres rationnels	332
23.13	Une équation proche de celle de Fermat	333
23.14	Et si on augmente le nombre de termes ?	333
23.15	Et dans le corps des nombres complexes ?	333
23.16	Pour approfondir	333
23.17	Conclusion	334
<b>24.</b>	<b>Équations diophantiennes du premier degré.....</b>	<b>335</b>
24.1	Définitions	335
24.2	Rappels	335
24.3	Rappel : Identité de Bachet de Méziriac (ou de Bezout)	335
24.4	Théorème de Gauss et sa généralisation :	336
24.5	L'équation diophantienne linéaire $ax + by = c$	336
24.6	Systèmes d'équations diophantiennes linéaires	339
24.7	Exercices	339
24.8	Conclusion	344

<b>25. Équations diophantiennes de degré 2 .....</b>	<b>347</b>
25.1 Introduction	347
25.2 Racine simple et racine multiple	347
25.3 L'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$	348
25.4 Généralités relatives aux équations à 2 inconnues	348
25.5 L'équation $ax^2 + bxy + cy^2 + d = 0$	349
25.6 L'équation diophantienne $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$	355
25.7 L'équation de Pell ou de Pell-Fermat	356
25.8 Équation $x^2 - ny^2 = -1$	363
25.9 Équations de Pell Généralisées	368
25.10 Le théorème de Lucas	369
25.11 L'équation de Markov	370
25.12 Stratégie de démonstration	371
25.13 Conclusion	371
25.14 Pour approfondir	372
<b>26. Équations diophantiennes de degré &gt; 2.....</b>	<b>373</b>
26.1 Généralités	373
26.2 Équation polynomiale	373
26.3 Les équations $ax^n \pm ucxy - cy^2 + d = 0$	374
26.4 Les équations du 3ème degré	374
26.5 Exercices	377
26.6 Les équations du quatrième degré	379
26.7 Exercices	383
26.8 Équations de degré > 4	384
26.9 Quelques résultats donnés sans démonstration	386
26.10 Stratégie complémentaire	386
26.11 Conjecture de Catalan et dérivées	386
26.12 Conjecture de Mordell	387
26.13 Conjecture de Beal	387
26.14 Pour approfondir	388
<b>27. Les entiers étendus : généralités .....</b>	<b>389</b>
27.1 Rappel historique	389
27.2 La notion de norme	389
27.3 La notion de métrique	390
27.4 La notion de valuation	391
27.5 Propriétés élémentaires des valuations	391
27.6 Valuation p-adique	391
27.7 La notion de parité	392
27.8 La notion de nombre premier	393
27.9 La notion de nombre primaire	393
27.10 Les entiers généralisés	393
27.11 Les nombres de la forme $a + b\sqrt{n}$	393
27.12 Les entiers quadratiques	394
27.13 Les irrationnels quadratiques	394
<b>28. Les entiers de Dirichlet .....</b>	<b>397</b>
28.1 Rappel : le nombre d'Or	397
28.2 Principales propriétés du nombre d'Or	398
28.3 Définition des entiers de Dirichlet	398
28.4 La division euclidienne	399

28.5	Conjugué d'un entier de Dirichlet	400
28.6	Norme d'un entier de Dirichlet	400
28.7	Propriétés de la norme des entiers de Dirichlet	400
28.8	Nombre de Dirichlet premier ou irréductible	401
28.9	Entiers de Dirichlet et petit théorème de Fermat	401
28.10	Parité des nombres de Dirichlet	402
28.11	Briques et triplets et pythagoriciens	402
28.12	Lien avec l'équation de Pell	403
28.13	À propos du grand théorème de Fermat	405
28.14	Conclusion	405
<b>29.</b>	<b>Les entiers de Gauss.....</b>	<b>407</b>
29.1	Définitions	407
29.2	Les opérations élémentaires	407
29.3	Les opérations d'addition, de soustraction et de multiplication	407
29.4	Normes des entiers de Gauss	408
29.5	La division euclidienne	409
29.6	Conjugué d'un entier de Gauss	410
29.7	Entiers inversibles	410
29.8	Parité des entiers de Gauss	410
29.9	Nombres de Gauss irréductibles ou premiers de Gauss	413
29.10	Les entiers primaires de Gauss	418
29.11	Entiers associés	419
29.12	Propriétés des entiers de Gauss associés :	419
29.13	Conditions pour que 2 entiers de Gauss soient associés	420
29.14	Comparaison de deux entiers de Gauss	420
29.15	l'identité de Bezout	420
29.16	Théorème fondamental de l'arithmétique	421
29.17	Le lemme de Gauss	421
29.18	Exercices	421
29.19	Triplets et triangles pythagoriciens de Gauss	422
29.20	Carrés de Gauss	422
29.21	A propos du grand théorème de Fermat	423
29.22	Les fonctions arithmétiques à valeur complexe	423
29.23	Caractère de Dirichlet	424
29.24	Conclusion	424
<b>30.</b>	<b>Entiers d'Eisenstein.....</b>	<b>425</b>
30.1	Définition	425
30.2	Quelques formules utiles	427
30.3	Norme d'un entier d'Eisenstein	428
30.4	Les entiers primaires d'Eisenstein	429
30.5	Nombre premier d'Eisenstein	429
30.6	Exercice	432
30.7	Parité des entiers d'Eisenstein	433
30.8	Triplets pythagoriciens	433
30.9	Carrés d'Eisenstein	433
30.10	Exercices	433
30.11	Utilisation	435
30.12	Pour approfondir	435

<b>31. La combinatoire.....</b>	<b>437</b>
31.1 Introduction	437
31.2 Différents aspects du dénombrement	437
31.3 Les permutations	437
31.4 Les combinaisons	442
31.5 Les arrangements	444
31.6 Les partitions	446
31.7 Exercices	448
31.8 Pour approfondir	450
31.9 Conclusion	450
<b>32. Annexe A : Les structures .....</b>	<b>451</b>
32.1 Le cardinal d'un ensemble	451
32.2 La structure de groupe	451
32.3 La structure d'anneau	451
32.4 La notion d'Idéal	453
32.5 La structure de corps	454
32.6 Les normes	454
<b>33. Annexe B : Les nombres de Bernoulli .....</b>	<b>457</b>
33.1 Définitions	457
33.2 Propriétés	458
33.3 Pour approfondir	458
<b>Bibliographie .....</b>	<b>459</b>
<b>Index alphabétique.....</b>	<b>461</b>