
Table des matières

Introduction	1
1 Langages logiques	5
1.1 Constantes, fonctions, prédicats et connecteurs	6
1.1.1 Principes	7
1.1.2 Langage de termes	8
1.1.3 Formules atomiques, connecteurs, formules logiques	13
1.2 Variables et quantificateurs	15
1.2.1 Principe et motivations	15
1.2.2 Termes, formules atomiques, formules logiques	17
1.3 Substitution	20
1.3.1 Portée d'un quantificateur, variables libres, variables liées	20
1.3.2 Formules closes, clôture universelle	23
1.3.3 Substitution dans une formule logique	23
1.4 Exercices	27
2 Preuves formelles	33
2.1 De la démonstration à la preuve	33
2.2 Emboîtements et règles de la déduction naturelle	37
2.2.1 Emboîtements de règles	37
2.2.2 Règles de la déduction naturelle de la logique intuitionniste	38
2.3 Preuves et formules prouvables	44
2.3.1 Définitions	44
2.3.2 Exemple d'élaboration d'une preuve	46
2.3.3 Une autre présentation des preuves	47
2.4 Logique classique	50
2.5 Règles dérivées, passage au contexte	52
2.5.1 Introduction de nouvelles règles de raisonnement	53
2.5.2 Quelques règles dérivées de la logique intuitionniste	55
2.5.3 Quelques règles dérivées de la logique classique	60
2.5.4 Passage au contexte	63
2.6 Exercices	64

3	Interprétation : fonctions, prédicats et connecteurs	69
3.1	Structures	70
3.1.1	Principe	70
3.1.2	Définition formelle	71
3.2	Interprétation des formules logiques	71
3.2.1	Interprétation des termes	72
3.2.2	Interprétation des formules atomiques	72
3.2.3	Interprétation des formules par des expressions booléennes	73
3.2.4	Évaluation des expressions booléennes	74
3.2.5	Formules équivalentes	78
3.3	Formules satisfiables, formules valides	79
3.3.1	Modèles, satisfiabilité, validité	79
3.3.2	Conséquence sémantique	80
3.4	Exercices	82
4	Variables et quantificateurs	89
4.1	Règles de déduction	89
4.1.1	Règle d'introduction du quantificateur universel : I_{\forall}	89
4.1.2	Règle d'élimination du quantificateur universel : E_{\forall}	90
4.1.3	Règle d'introduction du quantificateur existentiel : I_{\exists}	91
4.1.4	Règle d'élimination du quantificateur existentiel : E_{\exists}	91
4.1.5	Présentation arborescente des règles	93
4.2	Interprétation : variables et quantificateurs	94
4.2.1	Valuations, termes et formules atomiques	94
4.2.2	Interprétation des formules logiques	96
4.2.3	Formules satisfiables, formules valides	101
4.3	Exercices	105
5	Correction et complétude	113
5.1	Correction	114
5.2	Complétude	117
5.2.1	Principe de la démonstration	117
5.2.2	Ensembles cohérents, ensembles complets	118
5.2.3	Témoins de Henkin	120
5.2.4	Démonstration du théorème de complétude	124
6	Calculabilité et décidabilité	129
6.1	Modèles de calculabilité	129
6.2	Indécidabilité de l'arrêt des machines à registres	133
6.2.1	Formulation du problème	133
6.2.2	Démonstration	136
6.3	Indécidabilité de la logique des prédicats	137
6.3.1	Principe de la réduction	137
6.3.2	Construction de la formule F_p	138
6.3.3	Adéquation de F_p	139
6.3.4	Démonstration de l'indécidabilité de la logique des prédicats	141

7	Le fragment propositionnel	143
7.1	Restriction du langage	145
7.1.1	Syntaxe	145
7.1.2	Sémantique	146
7.1.3	Interprétation et fonctions booléennes	147
7.2	Représentation des fonctions booléennes	149
7.2.1	Tables de vérité	149
7.2.2	Diagrammes de décision	152
7.3	Satisfiabilité, décidabilité, complexité	158
7.3.1	Des formules aux tables	158
7.3.2	Décidabilité, complexité	159
7.4	Formes normales conjonctives et disjonctives	161
7.4.1	Littéraux, clauses et formes normales	161
7.4.2	Construction de formes normales par réécriture	162
7.4.3	Satisfiabilité d'une forme normale disjonctive	164
7.5	Clauses de Horn	165
7.5.1	Modèle minimal d'un ensemble de clauses de Horn	165
7.5.2	Construction du modèle minimal par point fixe	167
7.5.3	Algorithme de décision pour les clauses de Horn	170
8	Résolution, unification	173
8.1	Résolution	173
8.1.1	Résolution propositionnelle	174
8.1.2	Résolution en logique des prédicats	180
8.2	Programmation logique	183
8.2.1	Résolution et programmation logique	183
8.2.2	Langage de programmation Prolog	187
8.3	Unification	190
9	La correspondance preuves-programmes	199
9.1	Logique minimale	200
9.1.1	Types et programmes	200
9.1.2	Typage et preuve	204
9.2	Conjonctions et disjonctions	207
9.2.1	Type produit et conjonction	207
9.2.2	Type somme et disjonction	209
9.3	Élimination des coupures	213
9.3.1	Exécution des programmes	213
9.3.2	Élimination des coupures et exécution des programmes	214
10	Bases de données	219
10.1	Les bases de données relationnelles	219
10.2	Syntaxe et sémantique associées	222
10.2.1	Syntaxe	222
10.2.2	Sémantique	224
10.3	Interprétation logique des opérateurs relationels et des requêtes	225
10.3.1	Principe	225

10.3.2	Identité (requête atomique)	226
10.3.3	Sélection	227
10.3.4	Projection	229
10.3.5	Produit et jointure	231
10.3.6	Opérateurs ensemblistes	234
10.3.7	Opérateur de division	235
11	Model checking et logiques temporelles	239
11.1	<i>Model checking</i>	240
11.1.1	Modèle d'un système	240
11.1.2	<i>Model checking</i> et logique des prédicats du premier ordre	242
11.2	Logiques temporelles	245
11.2.1	<i>Computational Tree Logic</i> (CTL)	246
11.2.2	<i>Linear Temporal Logic</i> (LTL)	248
11.2.3	CTL et LTL : pouvoir d'expression incomparable	249
	Pour conclure	249
A	Solution des exercices	253
A.1	Langages logiques	253
A.2	Règles de déduction : connecteurs	261
A.3	Interprétation : fonctions, prédicats et connecteurs	276
A.4	Variables et quantificateurs	291
	Bibliographie	325
	Index	329