

# Table des matières

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| <b>1</b> | <b>Notions fondamentales</b>  | <b>13</b>  |
| 1.1      | Structures algébriques . . . . .  | 13         |
| 1.1.1    | Ensembles et applications . . . . .   | 13         |
| 1.1.2    | Structures à une loi de composition interne . . . . .                               | 16         |
| 1.1.3    | Groupes, sous-groupes et morphismes de groupes . . . . .                            | 18         |
| 1.1.4    | Groupe des permutations d'un ensemble . . . . .                                     | 24         |
| 1.1.5    | Produit direct et semi-direct de groupes . . . . .                                  | 26         |
| 1.1.6    | Ensembles munis de deux lois de composition interne . . . . .                       | 29         |
| 1.1.7    | Algèbre linéaire . . . . .  | 30         |
| 1.1.8    | Algèbre bilinéaire . . . . .  | 40         |
| 1.1.9    | Groupe agissant sur un ensemble . . . . .   | 44         |
| 1.1.10   | Ensembles munis de deux lois internes et d'une loi externe : les algèbres . . . . . | 53         |
| 1.2      | Géométrie . . . . .   | 56         |
| 1.2.1    | Géométrie axiomatique plane . . . . .   | 57         |
| 1.2.2    | Espaces affines . . . . .   | 60         |
| 1.2.3    | Plan projectif . . . . .  | 71         |
| 1.3      | Analyse et calcul différentiel . . . . .  | 90         |
| 1.3.1    | Notion de norme sur $\mathbb{R}^n$ et topologie . . . . .                           | 90         |
| 1.3.2    | Continuité et limite . . . . .  | 91         |
| 1.3.3    | Homéomorphismes . . . . .   | 92         |
| 1.3.4    | Fonctions différentiables . . . . .   | 94         |
| 1.3.5    | Variétés différentiables . . . . .  | 98         |
| 1.3.6    | Retour sur les groupes . . . . .  | 111        |
|          | Exercices . . . . .   | 118        |
| <b>2</b> | <b>Groupes</b>  | <b>121</b> |
| 2.1      | Théorie des corps. Théorie de Galois . . . . .                                      | 126        |
| 2.1.1    | Corps et sous-corps . . . . .   | 126        |
| 2.1.2    | Éléments de théorie de Galois . . . . .   | 135        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 2.2      | Représentations . . . . .                                    | 141        |
| 2.2.1    | Action de groupe . . . . .                                   | 141        |
| 2.2.2    | Représentations linéaires . . . . .                          | 142        |
| 2.2.3    | Produit tensoriel . . . . .                                  | 146        |
| 2.2.4    | Relations d'orthonormalité pour les $RIs$ , caractères . . . | 149        |
| 2.3      | Espace de Hilbert . . . . .                                  | 155        |
| 2.3.1    | Espace préhilbertien . . . . .                               | 155        |
| 2.3.2    | Les espaces de Hilbert en mécanique quantique . . . . .      | 157        |
| 2.3.3    | Action de groupe sur un espace de Hilbert . . . . .          | 159        |
| 2.3.4    | Opérateurs scalaires, vectoriels et tensoriels . . . . .     | 160        |
| 2.3.5    | Groupes doubles . . . . .                                    | 169        |
| 2.4      | Le groupe des translations . . . . .                         | 171        |
| 2.5      | Le problème du renversement du temps . . . . .               | 173        |
| 2.6      | Théorème de Wigner-Eckart . . . . .                          | 176        |
| 2.7      | Théorème de Noether . . . . .                                | 177        |
| 2.8      | Tableaux d'Young . . . . .                                   | 184        |
| 2.9      | Éléments de cristallographie . . . . .                       | 189        |
| 2.9.1    | Groupes de frise et pavages . . . . .                        | 189        |
| 2.9.2    | cristaux tridimensionnels . . . . .                          | 192        |
| 2.9.3    | Groupes de Shubnikov . . . . .                               | 199        |
|          | Exercices . . . . .  | 202        |
| <b>3</b> | <b>Algèbres de Lie</b> . . . . .                             | <b>213</b> |
| 3.1      | Définitions . . . . .  | 213        |
| 3.2      | Relation avec les groupes de Lie . . . . .                   | 217        |
| 3.3      | Représentations . . . . .                                    | 223        |
| 3.4      | Algèbres simples et semi-simples . . . . .                   | 225        |
| 3.5      | Classification des algèbres simples . . . . .                | 228        |
| 3.6      | Représentations des algèbres semi-simples . . . . .          | 246        |
| 3.7      | Intérêt des algèbres de Lie en physique . . . . .            | 255        |
|          | Exercices . . . . .  | 257        |
| <b>4</b> | <b>Topologie</b> . . . . .                                   | <b>259</b> |
| 4.1      | Graphes, nœuds, tresses . . . . .                            | 261        |
| 4.1.1    | Les graphes . . . . .  | 261        |
| 4.1.2    | Les nœuds . . . . .  | 262        |
| 4.1.3    | Les tresses . . . . .  | 268        |
| 4.2      | Espace topologique . . . . .                                 | 271        |
| 4.2.1    | Espace vectoriel normé . . . . .                             | 271        |
| 4.2.2    | Les espaces métriques . . . . .                              | 272        |
| 4.2.3    | Le concept de topologie . . . . .                            | 274        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 4.2.4    | Chemins, lacets, connexité . . . . .                   | 287        |
| 4.2.5    | Présentation d'un groupe . . . . .                     | 292        |
| 4.2.6    | Théorème de Seifert Van Kampen . . . . .               | 294        |
|          | Exercices . . . . .                                    | 304        |
| <b>5</b> | <b>Homologie et cohomologie</b>                        | <b>313</b> |
| 5.1      | Bref historique . . . . .                              | 313        |
| 5.2      | Homologie . . . . .                                    | 316        |
| 5.2.1    | Nombres de Betti . . . . .                             | 316        |
| 5.2.2    | Simplexes et complexes simpliciaux . . . . .           | 317        |
| 5.2.3    | Opérateurs de bord (approche intuitive) . . . . .      | 318        |
| 5.2.4    | Groupes d'homologie . . . . .                          | 319        |
| 5.2.5    | Détermination des groupes d'homologie . . . . .        | 323        |
| 5.3      | Cohomologie . . . . .                                  | 325        |
| 5.4      | Cohomologie de de Rham . . . . .                       | 326        |
| 5.5      | Au-delà de la cohomologie de de Rham . . . . .         | 332        |
| 5.5.1    | La cohomologie de Hochschild . . . . .                 | 332        |
| 5.5.2    | La recherche d'une cohomologie universelle . . . . .   | 336        |
|          | Exercices . . . . .                                    | 361        |
| <b>6</b> | <b>Variétés différentiables</b>                        | <b>363</b> |
| 6.1      | Différentiabilité d'une variété . . . . .              | 363        |
| 6.2      | Vecteurs tangents et formes différentielles . . . . .  | 364        |
| 6.3      | Tenseurs . . . . .                                     | 369        |
| 6.3.1    | Rappels . . . . .                                      | 369        |
| 6.3.2    | Produit tensoriel . . . . .                            | 370        |
| 6.3.3    | Algèbre extérieure . . . . .                           | 371        |
| 6.4      | Formes différentielles . . . . .                       | 373        |
| 6.4.1    | Dualité de Hodge . . . . .                             | 376        |
| 6.4.2    | Codifférentielle de Hodge . . . . .                    | 379        |
| 6.4.3    | Dérivée de Lie . . . . .                               | 379        |
| 6.5      | Dérivée covariante et connexion . . . . .              | 382        |
| 6.6      | Variétés riemanniennes . . . . .                       | 387        |
| 6.6.1    | Connexion riemannienne, connexion de Levi-Civita . . . | 389        |
| 6.6.2    | Courbure d'une variété riemannienne . . . . .          | 392        |
|          | Exercices . . . . .                                    | 396        |
| <b>7</b> | <b>Espaces fibrés</b>                                  | <b>401</b> |
| 7.1      | Généralités . . . . .                                  | 401        |
| 7.2      | Connexions . . . . .                                   | 409        |
| 7.2.1    | Transport parallèle dans un fibré principal. . . . .   | 416        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 7.3      | Courbure et torsion . . . . .                              | 418        |
| 7.3.1    | Courbure . . . . .   | 418        |
| 7.3.2    | Torsion . . . . .  | 420        |
|          | Exercices . . . . .  | 421        |
| <b>8</b> | <b>Quaternions et octonions</b>                            | <b>425</b> |
| 8.1      | Généralités . . . . .                                      | 425        |
| 8.2      | Algèbres . . . . .   | 426        |
| 8.3      | Quaternions et $SO(3, \mathbb{R})$ . . . . .               | 429        |
| 8.4      | Représentation géométrique des quaternions . . . . .       | 431        |
| 8.5      | Octonions . . . . .  | 434        |
| 8.5.1    | Groupes de Lie exceptionnels <i>vs</i> octonions . . . . . | 439        |
|          | Exercices . . . . .  | 448        |
|          | <b>Solutions des exercices</b>                             | <b>451</b> |
|          | <b>Bibliographie</b>                                       | <b>547</b> |
|          | <b>Index</b>   | <b>549</b> |