

Table des matières

I	Probabilités	11
1	Notions de probabilités	13
1.1	Introduction	13
1.1.1	Outils pour écrire un ouvrage traitant de probabilités . . .	15
1.2	Expérience aléatoire, espace des réalisations et événement . . .	16
1.2.1	Expérience aléatoire	16
1.2.2	Espace de réalisation	16
1.2.3	Événements	17
1.3	Probabilité d'un événement	18
1.3.1	Définition classique	18
1.3.2	Paradoxe de Bertrand	19
1.3.3	Définition fréquentiste	20
1.3.4	Probabilités et théorie des ensembles	21
1.3.5	Définition axiomatique	23
1.4	Approche ensembliste et tribus	24
1.4.1	Tribus	24
1.4.2	Mesure	25
1.4.3	Espace de probabilité	28
1.4.4	Propriétés	29
1.5	Calcul direct des probabilités	30
1.5.1	Probabilité uniforme	30
1.5.2	Notions d'analyse combinatoire	31

1.6	Probabilité conditionnelle	36
1.7	Indépendance statistique	38
1.8	Partitions et théorème de Bayes	40
1.8.1	Partitions	40
1.8.2	Théorème de Bayes	40
1.9	Exercices	41
1.9.1	Probabilités a priori	41
1.9.2	Probabilités conditionnelles	42
2	Variables aléatoires	47
2.1	Définition d'une variable aléatoire	47
2.2	Variables aléatoires discrètes	48
2.2.1	Loi de probabilité	48
2.2.2	Propriétés	49
2.3	Variables aléatoires continues	49
2.3.1	Densité de probabilité	50
2.3.2	Propriétés fondamentales	50
2.4	Fonction de répartition	50
2.4.1	Propriétés	51
2.5	Médiane	51
2.6	Fonction d'une variable aléatoire	52
2.6.1	Cas discret	52
2.6.2	Cas continu	53
2.7	Intégration d'une fonction selon une mesure de probabilité	56
2.7.1	Intégrale d'une fonction mesurable	56
2.7.2	Dans la pratique	59
2.8	Espérance mathématique	60
2.8.1	Espérance d'une fonction d'une variable aléatoire	61
2.8.2	Espérance et fonction de répartition	62
2.8.3	Propriétés de l'espérance mathématique	62
2.9	Variance et écart-type	62
2.10	Lois discrètes usuelles	64
2.10.1	Loi pile ou face ou loi de Bernoulli	64
2.10.2	Loi binomiale	65
2.10.3	Loi multinomiale : généralisation de la loi binomiale	66
2.10.4	Loi de Poisson (loi des événements rares)	67
2.10.5	Loi géométrique	68
2.10.6	Loi hypergéométrique	68
2.11	Loi continues usuelles	69
2.11.1	Loi uniforme ou équiprobable	69

2.11.2	Loi normale ou gaussienne	70
2.11.3	Densité de Rayleigh	72
2.11.4	Distribution exponentielle	73
2.11.5	Distribution de Laplace	74
2.11.6	Distribution de Cauchy	75
2.11.7	Loi gamma	75
2.12	Exemples	76
2.12.1	Règle de détection	76
2.12.2	Probabilité de panne	77
2.12.3	Probabilité en tant que mesure	78
2.13	Statistiques aux ordres supérieurs	78
2.13.1	Moments	79
2.13.2	Cumulants	80
2.14	Fonctions caractéristiques	81
2.14.1	Cas discret	81
2.14.2	Cas continu	82
2.14.3	Propriétés	82
2.15	Fonctions génératrices	82
2.16	Majoration de queues de probabilité	84
2.16.1	Inégalité de Tchebychev	84
2.16.2	Inégalités de Chernoff-Hoeffding	85
2.16.3	Inégalité de Bernstein	85
2.17	Normes d'une variable aléatoire	85
2.18	Théorème de projection	86
2.19	Tirage aléatoire	87
2.20	Exercices	89
2.20.1	Lois des variables aléatoires discrètes	89
2.20.2	Lois des variables aléatoires continues	91
2.20.3	Moments des variables aléatoires	93
2.20.4	Intégration et espérance	94
3	Couples de variables aléatoires	97
3.1	Fonction de répartition conjointe	97
3.1.1	Définition	97
3.1.2	Propriétés	98
3.2	Lois conjointes	98
3.2.1	Cas discret	98
3.2.2	Cas continu	99
3.3	Lois marginales	99
3.3.1	Cas discret	100

3.3.2	Cas continu	100
3.4	Lois conditionnelles	101
3.4.1	Introduction	101
3.4.2	Cas discret	101
3.4.3	Cas continu	101
3.5	Variables aléatoires indépendantes	102
3.5.1	Cas discret	102
3.5.2	Cas continu	102
3.6	Couple mixte	103
3.7	Moments	103
3.7.1	Définition générale	104
3.7.2	Moments d'ordre un et deux	104
3.7.3	Covariance et coefficient de corrélation	104
3.7.4	Propriétés	105
3.7.5	Indépendance et décorrélation	105
3.8	Fonctions caractéristiques	106
3.9	Espérance mathématique conditionnelle	106
3.10	Changement de variables	108
3.10.1	Une fonction de deux variables	108
3.10.2	Fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2	110
3.11	Distances et inégalités	111
3.12	Jeux rectangulaires	112
3.12.1	Jeux rectangulaires à somme nulle	112
3.12.2	Intelligence et prudence	113
3.12.3	Point d'équilibre	115
3.12.4	Stratégie mixte	115
3.13	Exercices	118
4	Vecteurs aléatoires réels	123
4.1	Définitions générales	123
4.2	Probabilités marginale et conditionnelle	127
4.3	Variables aléatoires indépendantes	128
4.4	Fonctions caractéristiques	129
4.5	Changement de variables	130
4.6	Moments	133
4.6.1	Cas général	133
4.6.2	Moment d'ordre un	134
4.6.3	Moments d'ordre deux	134
4.7	Vecteur gaussien	135
4.7.1	Fonction caractéristique	136

4.7.2	Transformations linéaires	137
4.7.3	Composantes gaussiennes	139
4.8	Vecteur gaussien dans \mathbb{R}^2	140
4.9	Exercices	143
5	Tendances asymptotiques de lois de probabilité	145
5.1	Convergences vers une valeur	145
5.1.1	Convergence au sens de Cauchy	146
5.1.2	Convergence sûre	146
5.1.3	Convergence presque sûre	147
5.1.4	Convergence en probabilité	147
5.1.5	Convergence en moyenne	149
5.2	Convergence en distribution ou en loi	150
5.2.1	Théorème de Levy-Cramer	152
5.2.2	Application aux variables discrètes	152
5.3	Lois des grands nombres	153
5.3.1	Loi faible des grands nombres	153
5.3.2	Loi forte des grands nombres	154
5.4	Théorème de la limite centrale	154
5.5	Propriétés asymptotiques	158
5.5.1	Loi binomiale	158
5.5.2	Loi de Poisson	159
5.5.3	Loi exponentielle	160
5.6	Exercices	162
II	Statistiques	165
6	Statistique descriptive	167
6.1	Définitions	167
6.1.1	Population	168
6.1.2	Échantillon	168
6.1.3	Caractère	169
6.1.4	Modalités	169
6.1.5	Structure statistique	170
6.2	Collecte de données	170
6.3	Présentation des données	170
6.3.1	Tableau statistique	171
6.3.2	Caractères qualitatifs	171
6.3.3	Caractères quantitatifs	171
6.4	Résumé des données	175

6.4.1	Moyennes	175
6.4.2	Moments	177
6.4.3	Médiane et autres quantiles	179
6.4.4	Résumés d'un histogramme	181
6.5	Régression linéaire	184
6.6	Géométrie d'un histogramme	186
6.7	Exercices	187
7	Estimation paramétrique	191
7.1	Définitions	192
7.2	Lois de probabilité pour les statistiques	193
7.2.1	La loi du χ^2 ou loi de Pearson	193
7.2.2	Loi de Student-Fisher à n degrés de liberté	194
7.2.3	Loi de Fisher-Snedecor	195
7.3	Paramètres empiriques	195
7.3.1	Théorème de Cochran	199
7.4	Estimation de l'espérance par un intervalle de confiance	200
7.4.1	Intervalle de confiance	200
7.4.2	Petit échantillon gaussien de variance connue	201
7.4.3	Petit échantillon gaussien de variance $\sigma_X^2 = \sigma^2$ inconnue	202
7.4.4	Grands échantillons	203
7.4.5	Intervalle pour une proportion	204
7.5	Maximum de vraisemblance	205
7.6	Exercices	206
8	Tests paramétriques	209
8.1	Signification et conformité	210
8.1.1	Test de signification	210
8.1.2	Test de conformité	210
8.2	Région de rejet	211
8.3	Test d'un échantillon	211
8.3.1	Petit échantillon gaussien de variance σ^2 connue	212
8.3.2	Petit échantillon gaussien de variance inconnue	212
8.3.3	Grands échantillons	212
8.3.4	Test pour une proportion	213
8.3.5	Intervalle de confiance	213
8.4	Tests de comparaison de deux espérances	213
8.4.1	Petits échantillons gaussiens de variances σ_1^2 et σ_2^2 connues	213
8.4.2	Petits échantillons gaussiens de variances σ_1^2 et σ_2^2 inconnues	214

8.4.3	Grands échantillons	215
8.4.4	Deux proportions	215
8.5	Test de comparaison de plusieurs espérances	216
8.6	Exercices	220
9	Tests non paramétriques	223
9.1	Loi multinomiale	224
9.1.1	Comportement asymptotique de la loi multinomiale	225
9.2	Test d'ajustement du χ^2	227
9.3	Test d'homogénéité	231
9.4	Test d'indépendance par table de contingence	232
9.5	Test de Kolmogorov-Smirnov	233
9.6	Test de normalité : droite de Henri	234
9.7	Exercices	235
10	Programmation sous MATLAB et Python	241
10.1	Programmation sous MATLAB	241
10.2	Prise en main de MATLAB	242
10.2.1	Main window	243
10.2.2	Help Window	247
10.2.3	Files Window ou Editor	251
10.3	Principales commandes et fonctions de MATLAB	252
10.3.1	Commandes de base	252
10.3.2	Commandes vectorielles et matricielles	252
10.3.3	Commandes de probabilité et de statistiques	253
10.3.4	Commandes graphiques	254
10.3.5	Commandes pour les polynômes	255
10.4	Exemples sur MATLAB	255
10.4.1	Opérations simples	255
10.4.2	Opérations simples sur des vecteurs	256
10.4.3	Opérations simples sur des matrices	256
10.4.4	Opérations simples sur des polynômes	257
10.4.5	Éléments simples de la programmation	257
10.4.6	Exemples sur les fonctions graphiques	257
10.4.7	Histogramme	258
10.4.8	Test de Normalité : droite de Henry	259
10.4.9	Test de chi2	259
10.5	Calcul matriciel, probabilités et statistiques en Python	260
10.5.1	Commandes de base	261
10.5.2	Commandes vectorielles et matricielles	262
10.5.3	Commandes de probabilité et de statistiques	263

10.5.4	Commandes graphiques	265
10.5.5	Commandes pour les polynômes	266
10.6	Exemples en Python	266
10.6.1	Opérations simples sur des vecteurs	266
10.6.2	Opérations simples sur des matrices	266
10.6.3	Opérations simples sur des polynômes	267
10.6.4	Exemples sur les fonctions graphiques	267
10.6.5	Histogramme	268
10.6.6	Test de Normalité : droite de Henry	268
10.6.7	Test du chi2	269
III	Exercices supplémentaires et programmation	271
11	Problèmes de synthèse	273
12	Exercices de programmation	293
12.1	Variables aléatoires	293
12.2	Estimation paramétrique	294
12.3	Tests statistiques	296
IV	Corrigés des problèmes	299
1	Notions de probabilités	301
1.1	Probabilités a priori	301
1.2	Probabilités conditionnelles	310
2	Lois des variables aléatoires	327
2.1	Lois des variables aléatoires discrètes	327
2.2	Lois des variables aléatoires continues	337
2.3	Moments des variables aléatoires	346
2.4	Intégration et espérance	349
3	Couples de variables aléatoires	363
4	Vecteurs aléatoires	377
5	Tendances asymptotiques	385
6	Statistique descriptive	399

7 Estimation paramétrique	407
8 Tests paramétriques	411
9 Tests non-paramétriques	419
11 Problèmes de synthèse	441
12 Exercices de programmation	507
12.1 Programmation : variables aléatoires	507
12.2 Programmation : estimation paramétrique	509
12.3 Programmation : tests statistiques	513
V Annexes	521
A Tables statistiques	523
A.1 Loi normale	524
A.2 Loi du χ^2	526
A.3 Loi du Student ou t	528
A.4 Loi de Fisher	530
B Statistiques prédictives résumées	533
B.1 Analyse de la moyenne	533
B.2 Tests non paramétriques	535
Bibliographie	537
Index	539