

Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| I | Géométrie absolue | 1 |
| 1 | Géométrie ordonnée | 3 |
| 1.1 | Axiomes d'incidence | 3 |
| 1.1.1 | Entre un point et une droite | 3 |
| 1.1.2 | Entre un point et un plan | 4 |
| 1.1.3 | Entre une droite et un plan | 4 |
| 1.1.4 | Entre deux droites | 4 |
| 1.1.5 | Entre deux plans | 5 |
| 1.2 | Axiomes d'ordre | 6 |
| 1.3 | Demi-plan, demi-droite, demi-espace | 8 |
| 1.3.1 | Demi-plan | 8 |
| 1.3.2 | Demi-droite | 10 |
| 1.3.3 | Demi-espace | 11 |
| 1.4 | Orientation | 12 |
| 1.4.1 | D'une droite | 12 |
| 1.4.2 | D'un plan | 14 |
| 1.4.3 | De l'espace | 18 |
| 1.5 | Convexité | 26 |
| 2 | Longueurs | 27 |
| 2.1 | Longueurs et déplacement de demi-droites | 27 |
| 2.1.1 | Axiomes de déplacement | 27 |
| 2.1.2 | Définition des longueurs | 28 |
| 2.2 | Ordre et opérations | 29 |
| 2.2.1 | Ordre | 29 |
| 2.2.2 | Addition | 30 |
| 2.2.3 | Soustraction | 31 |
| 2.3 | Vecteurs d'une droite | 32 |
| 2.3.1 | Equipollence | 32 |
| 2.3.2 | Addition | 33 |
| 2.3.3 | Multiplication par un entier relatif | 34 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 2.4 | Isométries de droites | 36 |
| 2.4.1 | Propriétés générales | 36 |
| 2.4.2 | Le groupe des isométries d'une droite | 38 |
| 3 | Angles et triangles | 41 |
| 3.1 | Angle figure | 41 |
| 3.1.1 | Définition des angles et des triangles | 41 |
| 3.1.2 | Intérieur d'un angle, d'un triangle | 41 |
| 3.2 | Angle grandeur | 43 |
| 3.2.1 | Axiomes de déplacement | 43 |
| 3.2.2 | Définition d'un angle grandeur | 45 |
| 3.2.3 | Coordonnées polaires | 46 |
| 3.3 | Deux cas d'égalité des triangles | 47 |
| 3.4 | Ordre et opérations sur les angles | 48 |
| 3.4.1 | Ordre | 48 |
| 3.4.2 | Addition | 51 |
| 3.4.3 | Soustraction | 58 |
| 3.5 | Angles et sécante | 59 |
| 3.6 | Angles droits | 61 |
| 3.7 | Inégalités dans un triangle | 63 |
| 3.7.1 | Dans un triangle quelconque | 63 |
| 3.7.2 | Dans un triangle rectangle | 66 |
| 3.8 | Autres cas d'égalité des triangles | 67 |
| 3.9 | Diviser par deux les longueurs et les angles | 70 |
| 3.9.1 | Milieu | 71 |
| 3.9.2 | Bissectrices | 72 |
| 4 | Orthogonalité | 77 |
| 4.1 | Droites perpendiculaires | 77 |
| 4.1.1 | Rappels | 77 |
| 4.1.2 | Médiatrice | 77 |
| 4.1.3 | Quadrilatère de Khayyam | 78 |
| 4.2 | Droite perpendiculaire à un plan | 80 |
| 4.2.1 | Définition | 80 |
| 4.2.2 | Plan perpendiculaire à une droite donnée | 82 |
| 4.2.3 | Plan médiateur | 83 |
| 4.2.4 | Droite perpendiculaire à un plan donné | 84 |
| 4.3 | Projection orthogonale | 85 |
| 4.3.1 | Définition et propriétés | 85 |
| 4.3.2 | Caractérisation des angles aigus | 88 |
| 4.3.3 | Caractérisation des bissectrices | 88 |
| 4.4 | Droites orthogonales | 90 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 4.5 | Rectiligne d'un dièdre | 91 |
| 4.6 | Plans perpendiculaires | 93 |
| 5 | Cercles | 95 |
| 5.1 | Quelques définitions | 95 |
| 5.2 | Problèmes d'intersection | 96 |
| 5.3 | Cercles circonscrits, inscrits, exinscrits | 99 |
| 5.4 | Quelques inégalités | 102 |
| 5.5 | Arcs de cercle | 105 |
| 5.5.1 | La figure | 105 |
| 5.5.2 | Égalité d'arcs | 107 |
| 5.5.3 | Addition | 109 |
| 5.5.4 | Ordre sur les arcs | 112 |
| 5.5.5 | Soustraction | 112 |
| 6 | Polygones | 115 |
| 6.1 | Quelques définitions | 115 |
| 6.1.1 | Ligne polygonale | 115 |
| 6.1.2 | Polygone | 115 |
| 6.2 | Les polygones convexes | 116 |
| 6.2.1 | Définition | 116 |
| 6.2.2 | Intérieur d'un polygone convexe | 117 |
| 6.2.3 | Convexité des quadrilatères | 119 |
| 6.2.4 | Convexité des polygones inscrits dans un cercle | 121 |
| 6.2.5 | Inégalités périmétriques | 124 |
| 6.3 | Les polygones simples | 128 |
| 6.3.1 | Simplicité, transversalité | 129 |
| 6.3.2 | Théorème d'équiparité | 131 |
| 6.3.3 | Faces d'un polygone simple | 135 |
| 6.3.4 | Intérieur et extérieur d'un polygone simple | 139 |
| 6.3.5 | Problèmes d'inclusion, triligne | 143 |
| 6.4 | Critère angulaire de convexité | 152 |
| 6.5 | Triangulation d'un polygone simple | 163 |
| 6.6 | Formule d'Euler pour les graphes plans | 165 |
| 7 | Isométries planes | 171 |
| 7.1 | Propriétés générales | 171 |
| 7.2 | Le groupe des isométries d'un plan | 173 |
| 7.3 | Symétries | 175 |
| 7.3.1 | Symétrie axiale | 175 |
| 7.3.2 | Symétrie centrale | 179 |
| 7.3.3 | Isométries involutives | 180 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 7.4 | Glissements | 181 |
| 7.5 | Rotations | 182 |
| 7.5.1 | Définition des rotations | 182 |
| 7.5.2 | Groupe des rotations de même centre | 182 |
| 7.5.3 | Définition des angles orientés | 184 |
| 7.5.4 | Angle d'une rotation | 186 |
| 7.5.5 | Groupe des angles orientés | 187 |
| 7.5.6 | Angles orientés de droites | 192 |
| 7.5.7 | Arcs orientés | 195 |
| 7.6 | Isométries planes et polygones réguliers | 196 |
| 7.6.1 | Sous-groupes finis d'angles orientés | 196 |
| 7.6.2 | Polygones réguliers | 203 |
| 7.6.3 | Polygones réguliers convexes | 207 |
| 7.6.4 | Groupe diédral | 209 |
| 7.7 | Isométries et faisceaux de droites | 210 |
| 7.7.1 | Classification des isométries planes | 210 |
| 7.7.2 | Conjugaison d'une symétrie par une symétrie axiale | 212 |
| 7.7.3 | Suite proportionnelle de droites | 214 |
| 7.7.4 | Droites liées | 216 |
| 7.7.5 | Théorème de Hjelmslev, théorème de transitivité | 219 |
| 7.7.6 | Faisceaux de droites | 224 |
| 7.7.7 | Droites remarquables d'un triangle | 226 |
| 7.7.8 | Théorème d'antiappariement | 229 |
| 8 | Isométries de l'espace | 235 |
| 8.1 | Le groupe des isométries de l'espace | 235 |
| 8.2 | Symétrie par rapport à un plan | 240 |
| 8.3 | Glissements de l'espace | 242 |
| 8.4 | Rotations de l'espace | 244 |
| 8.4.1 | Définition et lien avec les rotations planes | 244 |
| 8.4.2 | Groupe des rotations de même axe | 247 |
| 8.4.3 | Demi-tours | 248 |
| 8.5 | Groupe des isométries fixant un point | 251 |
| 9 | Géométrie sphérique | 253 |
| 9.1 | Quelques définitions | 253 |
| 9.2 | Problèmes d'intersection | 254 |
| 9.3 | Incidence et ordre sur la sphère | 256 |
| 9.4 | Grandeurs sphériques | 258 |
| 9.4.1 | Longueurs sphériques | 258 |
| 9.4.2 | Angles sphériques | 259 |
| 9.4.3 | s -milieu, s -médiatrice, s -bissectrice | 260 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 9.5 | Cercles sur une sphère | 262 |
| 9.6 | Isométries de la sphère | 265 |
| 9.6.1 | Isométries induites | 265 |
| 9.6.2 | Trois cas d'égalité des triangles sphériques | 266 |
| 9.6.3 | Le groupe des isométries de la sphère | 267 |
| 9.7 | Polarité et quatrième cas d'égalité | 269 |
| 9.8 | Polygones sphériques | 272 |
| 9.8.1 | Les polygones sphériques convexes | 273 |
| 9.8.2 | Faces d'un polygone sphérique simple | 275 |
| 9.8.3 | Triligne sphérique | 277 |
| 9.8.4 | Formule d'Euler pour les graphes sphériques | 280 |
| 10 | Polyèdres | 285 |
| 10.1 | Quelques définitions | 285 |
| 10.2 | Cas d'égalité des trièdres | 286 |
| 10.3 | Convexité | 287 |
| 10.4 | Les 5 polyèdres réguliers convexes | 289 |
| 10.5 | Polyèdres et groupes finis d'isométries | 292 |
| 10.6 | Exercices | 308 |
| 11 | Grandeurs | 309 |
| 11.1 | Type de grandeur | 309 |
| 11.1.1 | Propriétés générales | 310 |
| 11.1.2 | Type de grandeur archimédien | 318 |
| 11.1.3 | Type de grandeur continu | 324 |
| 11.1.4 | Correspondances | 328 |
| 11.2 | Géométrie archimédienne | 331 |
| 11.2.1 | Conséquences pour les angles | 331 |
| 11.2.2 | Quadrilatères de Khayyam et d'Al Haytham | 337 |
| 11.2.3 | Conséquences pour les arcs | 339 |
| 11.2.4 | Conséquences pour la sphère | 340 |
| 11.2.5 | Mesure algébrique des grandeurs orientées | 346 |
| 11.2.6 | Couples et triangles euclidiens | 348 |
| 11.3 | Géométrie continue | 355 |
| 11.3.1 | Continuité des grandeurs | 355 |
| 11.3.2 | Longueur d'un arc | 356 |
| 11.3.3 | Problèmes d'intersection | 362 |
| 11.3.4 | Polygones et polyèdres réguliers convexes | 367 |
| 11.3.5 | Parallèle limite | 371 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| II | Géométrie euclidienne | 373 |
| 12 | Parallélisme | 375 |
| 12.1 | Angles alternes internes | 375 |
| 12.2 | Directions | 377 |
| 12.2.1 | De droites | 377 |
| 12.2.2 | De plans | 378 |
| 12.2.3 | Orthogonalité | 379 |
| 12.3 | Parallélogrammes | 383 |
| 12.3.1 | Diverses définitions équivalentes | 383 |
| 12.3.2 | Rectangle | 384 |
| 12.3.3 | Losange | 386 |
| 12.3.4 | Carré | 386 |
| 12.3.5 | Axes de symétrie | 386 |
| 12.3.6 | Parallélépipède | 386 |
| 12.4 | Classification des isométries | 387 |
| 12.4.1 | Compléments sur les glissements | 387 |
| 12.4.2 | Classification des isométries planes | 388 |
| 12.4.3 | Classification des isométries de l'espace | 390 |
| 12.4.4 | Isométries conservant les directions | 391 |
| 12.5 | Droite des milieux, médianes | 392 |
| 12.6 | Angles de directions | 394 |
| 12.7 | Exercices | 395 |
| 13 | Proportions | 399 |
| 13.1 | Orientation d'une direction et mesure algébrique | 399 |
| 13.2 | Proportions et projections | 401 |
| 13.2.1 | Projection suivant une direction | 401 |
| 13.2.2 | Théorème de Thalès | 403 |
| 13.2.3 | Projection centrale et birapport | 405 |
| 13.3 | Triangles semblables | 407 |
| 13.4 | Relations dans un triangle rectangle | 409 |
| 13.5 | Le corps des scalaires | 410 |
| 13.6 | Coordonnées cartésiennes | 411 |
| 13.7 | Points divisant un segment | 412 |
| 13.7.1 | Dans un rapport donné | 412 |
| 13.7.2 | Division harmonique | 414 |
| 13.7.3 | Le nombre d'or | 420 |
| 13.8 | Alignement et concours | 421 |

| | |
|--|------------|
| 14 Aires | 425 |
| 14.1 Définition des aires | 425 |
| 14.2 Triangles, parallélogrammes, rectangles | 426 |
| 14.3 Addition | 429 |
| 14.4 Ordre | 432 |
| 14.5 Soustraction | 433 |
| 14.6 Mesure | 435 |
| 14.7 Quelques applications | 437 |
| 15 Cercles | 441 |
| 15.1 Problèmes d'intersection | 441 |
| 15.2 Cercles circonscrits, inscrits, exinscrits | 443 |
| 15.3 Cercle d'Apollonius | 444 |
| 15.4 Angle inscrit | 445 |
| 15.5 Conditions de cocyclicité | 452 |
| 15.5.1 Condition angulaire | 452 |
| 15.5.2 Conditions métriques | 453 |
| 15.6 Tangentes | 457 |
| 15.7 Quelques constructions de polygones réguliers | 458 |
| 15.7.1 $n = 3$ et AB est donné | 458 |
| 15.7.2 $n = 4$ | 458 |
| 15.7.3 $n = 6$ | 459 |
| 15.7.4 $n = 3$ et \mathcal{C} est donné | 460 |
| 15.7.5 $n = 5$ | 460 |
| 15.8 Périmètre et aire | 462 |
| 15.8.1 Périmètre | 462 |
| 15.8.2 Aire | 465 |
| 15.9 Exercices | 466 |
| 16 Trigonométrie | 471 |
| 16.1 Cas des angles grandeur | 471 |
| 16.1.1 Définition des lignes trigonométriques | 471 |
| 16.1.2 Supplémentaire, complémentaire | 474 |
| 16.1.3 Quelques valeurs | 475 |
| 16.2 Relations métriques dans le triangle | 476 |
| 16.3 Cas des angles orientés | 478 |
| 16.3.1 Définition des lignes trigonométriques | 478 |
| 16.3.2 Cercle trigonométrique | 479 |
| 16.3.3 Addition d'un angle droit ou plat | 481 |
| 16.3.4 Formules d'addition | 482 |
| 16.4 Fonctions trigonométriques | 483 |
| 16.4.1 Mesure des angles en radians | 483 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| 16.4.2 | Définition des fonctions trigonométriques | 486 |
| 16.4.3 | Dérivabilité | 486 |
| 16.4.4 | Fonctions réciproques | 487 |
| 16.4.5 | Calcul de π | 488 |
| 16.5 | Exercices | 489 |
| 17 | Vecteurs | 491 |
| 17.1 | Structure d'espace vectoriel | 491 |
| 17.1.1 | La relation d'équipollence | 491 |
| 17.1.2 | Addition | 492 |
| 17.1.3 | Multiplication par un scalaire | 494 |
| 17.1.4 | Sous-espaces vectoriels | 494 |
| 17.2 | Calcul barycentrique | 497 |
| 17.2.1 | Définition du barycentre | 497 |
| 17.2.2 | Calcul sur les points | 498 |
| 17.2.3 | Isobarycentre | 499 |
| 17.2.4 | Coordonnées barycentriques | 500 |
| 17.2.5 | Alignement et concours | 501 |
| 17.2.6 | Convexité. | 505 |
| 17.3 | Algèbre linéaire | 507 |
| 17.3.1 | bases, matrices | 508 |
| 17.3.2 | Applications linéaires | 510 |
| 17.3.3 | Déterminants | 513 |
| 17.3.4 | Coordonnées cartésiennes | 517 |
| 17.3.5 | Applications affines | 519 |
| 17.4 | Calcul vectoriel métrique | 524 |
| 17.4.1 | Produit scalaire | 524 |
| 17.4.2 | Isométries | 528 |
| 17.4.3 | Similitudes | 535 |
| 17.4.4 | Produit vectoriel | 542 |
| 17.4.5 | Trigonométrie sphérique | 544 |
| 17.5 | Exercices | 546 |
| 18 | Géométrie anallagmatique | 553 |
| 18.1 | Orthogonalité | 553 |
| 18.2 | Faisceaux | 555 |
| 18.2.1 | Axe radical de deux cercles | 555 |
| 18.2.2 | Faisceau de cercles | 556 |
| 18.2.3 | Conjugaison | 558 |
| 18.2.4 | Faisceau de sphères | 559 |
| 18.3 | Birapport de quatre points cocycliques | 560 |
| 18.4 | Propriétés harmoniques | 562 |

| | | |
|--------------------------------------|--|------------|
| 18.4.1 | Polarité par rapport à un cercle | 562 |
| 18.4.2 | Division harmonique sur un cercle | 568 |
| 18.4.3 | Polarité par rapport à une sphère | 569 |
| 18.5 | Inversion | 569 |
| 18.5.1 | Définition | 569 |
| 18.5.2 | Points inverses par rapport à un cercle, une sphère | 570 |
| 18.5.3 | Image d'une droite, d'un cercle, d'un plan, d'une sphère | 571 |
| 18.5.4 | Action sur les longueurs, les angles | 573 |
| 18.5.5 | Invariant anallagmatique | 575 |
| 18.6 | Groupe circulaire | 577 |
| 18.6.1 | Plan anallagmatique et transformations circulaires | 577 |
| 18.6.2 | Générateurs | 580 |
| 18.6.3 | Forme réduite d'une transformation circulaire | 584 |
| 18.7 | Exercices | 586 |
| III Géométrie de Lobatchevsky | | 589 |
| 19 | Incidence, longueurs et angles | 591 |
| 19.1 | Parallèles limites | 591 |
| 19.1.1 | Axiome de Lobatchevsky | 591 |
| 19.1.2 | Les bouts | 592 |
| 19.1.3 | Angle de parallélisme | 598 |
| 19.2 | Quelques inégalités | 599 |
| 19.2.1 | Angles alternes internes | 599 |
| 19.2.2 | Quadrilatères de Khayyam et d'Al Haytham | 600 |
| 19.2.3 | Somme des angles d'un triangle | 601 |
| 19.2.4 | Quadrilatère ayant deux angles droits | 603 |
| 19.2.5 | Projection orthogonale | 604 |
| 19.3 | Position relative de deux droites | 605 |
| 19.4 | Triangles limites de première espèce | 606 |
| 19.5 | Surjectivité de l'angle de parallélisme | 608 |
| 19.6 | Triangles limites de seconde espèce | 611 |
| 19.7 | Triangles limites de troisième espèce | 612 |
| 20 | Isométries, bouts et faisceaux | 615 |
| 20.1 | Classification | 615 |
| 20.1.1 | Des isométries directes | 615 |
| 20.1.2 | Des faisceaux | 616 |
| 20.1.3 | Groupe des rotations généralisées de même centre | 617 |
| 20.2 | Isométries conservant un faisceau | 618 |
| 20.2.1 | Faisceau elliptique | 618 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 20.2.2 | Faisceau hyperbolique | 618 |
| 20.2.3 | Faisceau parabolique | 619 |
| 20.3 | Équidistantes | 620 |
| 20.4 | Horicycles | 621 |
| 20.4.1 | Définition | 621 |
| 20.4.2 | Problèmes d'intersection | 621 |
| 20.4.3 | Arcs d'horicycle | 623 |
| 20.4.4 | Longueurs d'arc | 625 |
| 21 | Modèle de Poincaré | 627 |
| 21.1 | Axiomes d'incidence | 628 |
| 21.2 | Axiomes d'ordre | 628 |
| 21.3 | Axiomes de déplacement | 633 |
| 21.4 | Axiomes des grandeurs | 636 |
| 21.5 | Axiome de Lobatchevsky | 637 |
| 21.6 | Expression de l'angle de parallélisme | 639 |
| 22 | Arithmétique des bouts | 641 |
| 22.1 | Le corps des bouts | 641 |
| 22.1.1 | Addition | 641 |
| 22.1.2 | Ordre | 642 |
| 22.1.3 | Multiplication | 643 |
| 22.1.4 | Le corps des bouts | 644 |
| 22.2 | Isométries et homographies | 645 |
| 22.2.1 | Le groupe des homographies | 645 |
| 22.2.2 | Homographie induite par une isométrie | 646 |
| 22.2.3 | Bouts fixes d'une homographie | 648 |
| 22.2.4 | Involutions, faisceaux, équation tangentielle d'un point | 649 |
| 22.2.5 | Rotations | 652 |
| 22.3 | Coordonnées | 653 |
| 22.3.1 | Coordonnées (pseudo)-orthogonales, (pseudo)-polaires | 653 |
| 22.3.2 | Relations | 654 |
| 22.3.3 | Coordonnées de Poincaré | 657 |
| 22.4 | Trigonométrie | 659 |
| 22.4.1 | Définition des fonctions trigonométriques | 659 |
| 22.4.2 | Relations trigonométriques entre coordonnées | 660 |
| 22.4.3 | Relations métriques dans un triangle rectangle | 661 |
| 22.4.4 | Relations métriques dans un triangle quelconque | 662 |
| 22.5 | Quelques applications | 663 |
| 22.5.1 | Construction de la l -parallèle | 663 |
| 22.5.2 | Orthocentre | 665 |

| | | |
|----------|---|------------|
| A | Liste des axiomes | 667 |
| A.1 | Axiomes d'incidence | 667 |
| A.2 | Axiomes d'ordre | 667 |
| A.3 | Axiomes de déplacement | 668 |
| A.4 | Axiomes des grandeurs | 669 |
| A.5 | Axiomes de parallélisme | 669 |
| A.6 | Axiomes de la géométrie absolue | 669 |
| A.7 | Axiomes de la géométrie euclidienne | 669 |
| A.8 | Axiomes de la géométrie de Lobatchevsky | 670 |
| B | Note sur la construction des réels | 671 |
| B.1 | Ordre | 671 |
| B.2 | Addition | 672 |
| B.3 | Multiplication | 672 |
| B.4 | Le corps des réels | 673 |
| B.5 | Valeur approchée | 673 |